Pour réussir les tests d'aptitude numérique, il faut s'appuyer sur des connaissances mathématiques de base et une méthode efficace pour le calcul mental et rapide. C'est l'objectif des fiches qui suivent. Chacune est constituée de trois parties : ce qu'il faut savoir ; ce qu'il faut savoir faire ; et des exercices d'application sur chaque notion.

# 2 TESTS D'APTITUDE NUMÉRIQUE

# 21 PRÉSENTATION DES TESTS D'APTITUDE NUMÉRIQUE

**Les tests d'aptitude numérique consistent soit en des questions à choix multiple (QCM) ; soit en de courts problèmes ; soit en des suites numériques. Le principal écueil auquel se heurtent les candidats est celui du manque de temps pour terminer l'ensemble des exercices. Avec une bonne connaissance des bases mathématiques, un entraînement régulier au calcul mental et la maîtrise de quelques astuces pour aller plus vite, vous parviendrez à surmonter cette contrainte.**

## 1. Les QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées, fréquemment cinq. Souvent, sauf indication contraire, une seule réponse est exacte.

Pour gagner du temps lors de QCM, il est recommandé de :

– partir des réponses proposées au lieu de raisonner directement ;

Exemple Une bibliothécaire achète 22 revues, les unes à 3 € et les autres à 2,70 €. Elle paie en tout 63,90 €. Combien de revues de chaque sorte a-t-elle achetées ?

Ⓐ 15 revues à 3 € et 7 revues à 2,70 €

Ⓑ 13 revues à 3 € et 9 revues à 2,70 €

Ⓒ 11 revues à 3 € et 11 revues à 2,70 €

Ⓓ 7 revues à 3 € et 17 revues à 2,70 €

On peut éliminer la réponse Ⓓ : le nombre total de revues est 24.

On calcule : $15 \times 3 + 7 \times 2,70 = 63,90$.

La réponse Ⓐ est la réponse exacte.

– traduire l'énoncé par un schéma pour mieux comprendre les données ;

– raisonner sur une valeur numérique particulière ;

Exemple Les deux tiers d'un champ rectangulaire sont partagés en quatre lots de même aire. Quelle fraction de l'aire totale du champ représente l'aire de chaque lot ?

Ⓐ $\frac{1}{12}$ Ⓑ $\frac{1}{3}$ Ⓒ $\frac{3}{8}$ Ⓓ $\frac{2}{7}$ Ⓔ $\frac{1}{6}$

Supposons par exemple que le champ ait une aire de 60 m$^2$. Les $\frac{2}{3}$ de 60 m$^2$ font 40 m$^2$ et chaque lot 10 m$^2$. La fraction cherchée est donc : $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

La réponse exacte est la réponse Ⓔ ;

– utiliser les ordres de grandeurs.

Exemple Une voiture parcourt 795 km en 8 h 6 min. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Ⓐ 85,1 km/h Ⓑ 88,3 km/h Ⓒ 98,1 km/h Ⓓ 102 km/h

Cherchons une valeur proche de la valeur exacte.

795 km est voisin de 800 km ; 8 h 6 min est voisin de 8 h.

La vitesse moyenne est donc proche de 100 km/h.

Deux réponses semblent possibles : Ⓒ ou Ⓓ.

Mais la réponse est inférieure à 100 km/h. En effet, en 8 h 6 min, à une vitesse supérieure à 100 km/h, la distance parcourue serait supérieure à 800 km.

La réponse exacte est donc la réponse Ⓒ.



## 2. Les courts problèmes

Indépendants les uns des autres, ils font appel à des notions très diverses.

Exemple Sur une carte au 1/250 000, la distance entre 2 villes est de 14,6 centimètres. Quelle est la distance réelle entre ces villes ?

La réponse est 36,5 km.

Pour gagner du temps lors des problèmes sans proposition de réponses, il est recommandé :

– d'établir l'ordre dans lequel vous allez les résoudre. Pour cela, lisez rapidement l'ensemble des énoncés, en identifiant pour chacun quelle notion il met en jeu, quelle méthode de résolution (raisonnement, calcul, tracé de figure, de graphique...) il réclame ;

– de repérer alors ceux que vous saurez résoudre sans y passer trop de temps, c'est-à-dire : ceux qui font appel à des connaissances que vous maîtrisez bien et ceux dont le résultat peut être obtenu par un calcul rapide et simple (il faut se méfier des exercices dont la résolution réclame un raisonnement qui peut prendre beaucoup de temps) ;

– de regarder attentivement quelles sont les données fournies par l'énoncé et utiles à la résolution de l'exercice (il y en a parfois de superflues...).

D'une manière générale, vérifiez l'exactitude des résultats, ou tout au moins leur vraisemblance, par exemple en examinant l'ordre de grandeur, en reportant les valeurs trouvées dans l'énoncé, en contrôlant par des mesures sur une figure, etc.

## 3. Les suites numériques

Plus qu'aux connaissances mathématiques, elles font appel à la logique ou à l'astuce. Elles sont construites à partir de séries de nombres. Il s'agit de découvrir les lois de progression et de les appliquer pour trouver les chiffres manquants.

Exemple 7 14 28 56 ?

La réponse est 112. Chaque terme est multiplié par 2.

Il peut également s'agir de trouver une suite à partir d'un raisonnement hypothético-déductif :

– soit la réponse est proposée. Dans ce cas, le plus rapide est de procéder par élimination ;

Exemple Hypothèses :

La suite 7 - 2 a un élément commun et bien placé avec la suite à trouver.

La suite 7 - 8 a un élément commun et mal placé avec la suite à trouver.

Ⓐ 7 - 2 Ⓑ 2 - 8 Ⓒ 8 - 2 Ⓓ 7 - 8 Ⓔ 3 - 7

On peut écarter les réponses identiques aux hypothèses de gauche (Ⓐ et Ⓓ).

Puis on teste chacune des réponses possibles avec les données de gauche : 7 ne peut être à la fois bien placé et mal placé. Restent en éléments communs 2 et 8 mal placés : la suite ne peut être que 8 - 2, Ⓒ.

– soit la réponse est à trouver, quelquefois sans qu'aucune consigne soit donnée.

Exemple 14 - 19 - 2 - 21

2 - 19 - 13 - 21 ont chacune trois éléments communs bien placés.

19 et 21 sont forcément bien placés puisque dans les deux hypothèses à la même position ; 2 ne peut être bien placé en première et en troisième positions ; 14 est donc bien placé dans la première hypothèse et 13 dans la seconde. La suite à trouver est : 14 - 19 - 13 - 21.

# 22 NOMBRES - COMPARAISON DES NOMBRES

**Dans ce chapitre, nous supposons que les opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division) sur des nombres simples sont connues, en particulier les tables de multiplication. Nous allons rappeler le vocabulaire de base du calcul numérique.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Les nombres décimaux

Les nombres s'écrivent à l'aide de dix chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

La position des chiffres indique combien il y a d'unités, de dizaines, …

| millions | centaines de mille | dizaines de mille | mille | centaines | dizaines | unités | dixièmes | centièmes | millièmes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | 2 | 7 | 3, | 5 | 8 | 6 |

Dans le nombre 4 273,586 le chiffre des unités est 3 ; celui des dizaines est 7 ; celui des dixièmes est 5.

La partie entière est constituée des chiffres à gauche de la virgule, la partie décimale des chiffres à droite de la virgule : dans le nombre 4 273,586 la partie entière est 4 273 et la partie décimale est 0,586.

### Les nombres entiers. PPCM. PGCD

Un nombre entier est un nombre dont la partie décimale est nulle. Les nombres entiers sont : 0, 1, 2, 3, 4, ….

**Multiple.** Soit le nombre entier 24. On peut écrire : $24 = 3 \times 8$. On dit que 24 est un multiple de 3.

Un entier $a$ est multiple d'un entier $b$ si on peut écrire $a = b \times q$, où $q$ est un entier (0 est multiple de tous les nombres car $0 = b \times 0$, quel que soit le nombre $b$).

**Diviseur.** Au lieu de dire que 24 est un multiple de 3, on dit également que 3 est un diviseur de 24.

Un entier $b$ est diviseur d'un entier $a$ si on peut écrire $a = b \times q$, où $q$ est un entier (1 est diviseur de tous les nombres car $a = a \times 1$, quel que soit le nombre $a$).

**Multiples communs. PPCM.** Un multiple commun à deux nombres $x$ et $y$ est un nombre multiple à la fois de $x$ et de $y$. Ainsi :

les multiples de 2 sont : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, … .

Les multiples de 3 sont : 0, 3, 6, 9, 12, …

Les multiples communs à 2 et 3 sont : 0, 6, 12, …

Le PPCM (Plus petit commun multiple) de deux ou plusieurs nombres est le plus petit des multiples communs non nuls à ces nombres.

Ainsi, le PPCM de 2 et 3 est 6.

**Diviseurs communs. PGCD.** Un diviseur commun à deux nombres $x$ et $y$ est un nombre diviseur à la fois de $x$ et de $y$. Ainsi :

les diviseurs de 70 sont : 1, 2, 5, 7, 10,14, 35, 70.

Les diviseurs de 42 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

Les diviseurs communs à 70 et 42 sont : 1, 2, 7, 14.

Le PGCD (Plus grand commun diviseur) de deux ou plusieurs nombres est le plus petit des diviseurs communs à ces nombres.

Ainsi, le PGCD de 70 et 42 est 14.

**Nombre premier.** Un nombre premier est un entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.



Ainsi, 5 est un nombre premier : 5 n'est divisible que par 1 et par 5. Mais 10 n'est pas premier.

Il est utile de connaître les nombres premiers inférieurs à 30 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

**Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.** Tout nombre entier peut se décomposer en un produit de nombres premiers.

Exemple $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ que l'on peut écrire : $24 = 2^3 \times 3$. Également : $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.

### Les fractions

Une fraction est le quotient de deux nombres entiers. Le numérateur est le nombre situé au dessus du trait de fraction et le dénominateur (qui ne doit pas être égal à 0) est le nombre situé au dessous du trait de fraction.

Exemple $\frac{17}{3}$ est une fraction dont le numérateur est 17 et le dénominateur 3.

**Écriture décimale d'une fraction.** On trouve l'écriture décimale d'une fraction en divisant le numérateur par le dénominateur.

Si la division ne se termine pas, on peut prendre une valeur décimale approchée.

Exemple $\frac{5}{4} = 1{,}25$ ; $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$

**Fraction d'une grandeur.** Prendre la fraction $\frac{p}{q}$ d'une grandeur, c'est la partager en $q$ parties égales et prendre $p$ de ces parties.

Ainsi, pour prendre les $\frac{3}{5}$ de 20 €, on divise 20 € par 5, ce qui fait 4 €, et on multiplie par 3 : on obtient 12 €.

**Fractions égales. Simplification.** Pour obtenir une fraction égale à une fraction donnée, on multiplie ou on divise les deux termes de la fraction par le même nombre non nul.

Exemple $\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$. La fraction $\frac{2}{3}$ est égale à $\frac{8}{12}$, mais ses termes sont inférieurs à ceux de $\frac{8}{12}$ : on dit qu'on a simplifié la fraction $\frac{8}{12}$ par 4.

### Les nombres relatifs

Un nombre précédé ou non d'un signe + est un nombre positif.

Exemple + 4 ; 5,2 sont des nombres positifs.

Un nombre précédé d'un signe – est un nombre négatif.

Exemple – 7 est un nombre négatif.

Le nombre zéro est considéré à la fois comme positif et négatif.

Les nombres positifs ou négatifs s'appellent des nombres relatifs. Le nombre sans le signe est appelé valeur absolue du nombre relatif.

Exemple La valeur absolue de + 4 est 4 ; celle de – 7 est 7.

Les nombres relatifs + 3 et – 3 sont dits opposés : ils ont même valeur absolue, mais sont de signe contraire.

### Comparaison des nombres

Comparer deux nombres, c'est chercher lequel est le plus grand (ou le plus petit), ou dire s'ils sont égaux.

Les signes de comparaison sont : $<$ (plus petit) $=$ (égale) $>$ (plus grand).

Ranger des nombres dans l'ordre croissant, c'est les ranger du plus petit au plus grand.

Ranger des nombres dans l'ordre décroissant, c'est les ranger du plus grand au plus petit.

**Pour comparer deux nombres entiers.** Le plus petit est celui qui a le moins de chiffres.

S'ils ont le même nombre de chiffres, on compare chiffre à chiffre à partir de la gauche.

**Pour comparer deux nombres décimaux.** On commence par comparer les parties entières : le plus petit est celui qui a la plus petite partie entière ; s'ils ont la même partie entière , on compare les parties décimales chiffre à chiffre à partir des dixièmes.

**Pour comparer deux fractions.** Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.

Si deux fractions ont le même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.

Une fraction est inférieure à 1 si son numérateur est inférieur à son dénominateur.

On peut également comparer leurs écritures décimales.

**Pour comparer deux nombres relatifs.** Tout nombre négatif est inférieur ou égal à zéro. Tout nombre positif est supérieur ou égal à zéro.

Un nombre négatif est plus petit qu'un nombre positif.

Si deux nombres sont négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande valeur absolue.

## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Outre leur utilisation dans des problèmes où interviennent des multiples et des diviseurs, les notions de PPCM et de PGCD sont utiles dans les calculs avec des fractions.

### Reconnaître si un nombre est divisible par 2, 3, 5, 9 ou 10

Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Exemple **Le nombre 510 est-il divisible par 2, 3, 5, 9 ou 10 ?**

510 se termine par 0 ; il est donc divisible par 2.

La somme des chiffres de 510 est : 5 + 1 + 0 = 6 qui est un multiple de 3 ; donc 510 est divisible par 3.

510 se termine par 0 ; il est donc divisible par 5.

La somme des chiffres de 510 est 6 qui n'est pas un multiple de 9 ; donc 510 n'est pas divisible par 9.

510 se termine par 0 ; il est donc divisible par 10.

### Reconnaître si un entier est un nombre premier

Pour savoir si un nombre entier est premier, on le divise par les nombres premiers successifs.

Si aucune division ne se termine, le nombre est premier.

On arrête les divisions lorsque le quotient devient supérieur au diviseur.

Exemple **Montrer que 89 est un nombre premier.**

En divisant 89 successivement par les nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, on constate qu'aucune de ces divisions ne se termine. Il est inutile de poursuivre les divisions au-delà de 11. Le nombre 89 est donc un nombre premier.

**Le nombre 119 est-il un nombre premier ?**

En divisant 119 par les nombres premiers successifs, on constate que 119 ÷ 7 = 17. On a donc : 119 = 7 × 17 et 119 n'est pas un nombre premier.





### Décomposer un entier en produit de nombres premiers

On effectue les calculs sous forme d'un tableau. Dans la colonne de droite, on écrit les diviseurs premiers du nombre (le même diviseur peut figurer plusieurs fois). Dans la colonne de gauche, on écrit les quotients successifs obtenus. On arrête lorsque le quotient est égal à 1.

Exemple **Décomposer 2 100 en produit de nombres premiers.**

| | |
|---|---|
| 2 100 | 2 |
| 1 050 | 2 |
| 525 | 3 |
| 175 | 5 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

On peut donc écrire : $2\,100 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$ ;

ou plus simplement : $2\,100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

### Calculer le PPCM ou le PGCD de deux nombres

On décompose chaque nombre en produit de nombres premiers.

Le PPCM est le produit de tous les diviseurs premiers, communs ou non, affectés de leur plus grand exposant.

Le PGCD est le produit de tous les diviseurs premiers communs, affectés de leur plus petit exposant.

Exemple **Calculer le PPCM et le PGCD de 90 et 525.**

On décompose 90 et 525 en produit de nombres premiers :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 90 | 2 | 525 | 3 |
| 45 | 3 | 175 | 3 |
| 15 | 3 | 35 | 5 |
| 5 | 5 | 7 | 7 |
| 1 | | 1 | |

On a donc : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ et $525 = 3 \times 5^2 \times 7$.

Le PPCM de 90 et 525 est : $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3\,150$.

Le PGCD de 90 et 525 est : $2 \times 3 \times 5 = 30$.

### Simplifier une fraction

On cherche un diviseur commun aux deux termes de la fraction.

On divise le numérateur et le dénominateur par ce diviseur commun.

Exemple **Simplifier la fraction $\frac{198}{252}$.**

On voit que 198 et 252 sont divisibles par 2. On simplifie par 2 : $\frac{198}{252} = \frac{198 \div 2}{252 \div 2} = \frac{99}{126}$.

On voit que 99 et 126 sont divisibles par 9. On simplifie par 9 : $\frac{99}{126} = \frac{99 \div 9}{126 \div 9} = \frac{11}{14}$.

Les nombres 11 et 14 n'ayant plus de diviseur commun, on ne peut plus simplifier (on dit que la fraction est irréductible). Finalement : $\frac{198}{252} = \frac{11}{14}$.

On aurait pu aussi chercher le PGCD de 198 et 252, qui est 18, et diviser directement les deux termes de $\frac{198}{252}$ par 18.

### Calculer une fraction d'une grandeur

On divise la grandeur par le dénominateur, puis on multiplie le résultat par le numérateur (cela revient à multiplier la grandeur par la fraction).

Exemple **Calculer les $\frac{5}{12}$ de 96 €.**

On a : 96 ÷ 12 = 8 et 8 × 5 = 40 ; donc les $\frac{5}{12}$ de 96 € représentent 40 €.

### Mettre des fractions au même dénominateur

On simplifie éventuellement les fractions.

On cherche le PPCM des dénominateurs.

On écrit une fraction égale à chacune des fractions données en prenant pour dénominateur le PPCM trouvé.

Exemple **Réduire au même dénominateur les fractions $\frac{3}{18}$ et $\frac{15}{35}$.**

On simplifie : $\frac{3}{18} = \frac{3 \div 3}{18 \div 3} = \frac{1}{6}$ et $\frac{15}{35} = \frac{15 \div 5}{35 \div 5} = \frac{3}{7}$.

Le dénominateur commun est $6 \times 7 = 42$.

On a : $\frac{1}{6} = \frac{1 \times 7}{6 \times 7} = \frac{7}{42}$ et $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 6}{7 \times 6} = \frac{18}{42}$. Les fractions cherchées sont $\frac{7}{42}$ et $\frac{18}{42}$.

### Comparer des nombres

On applique les règles de comparaison.

Exemple **Comparer les nombres 25,63 et 25 589 ; $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$ ; – 5 et – 2.**

25,63 et 25 589 sont des décimaux qui ont même partie entière 25 ; mais 6, chiffre des dixièmes de 25,63, est supérieur à 5, chiffre des dixièmes de 25,589. Donc $25{,}63 > 25{,}589$.

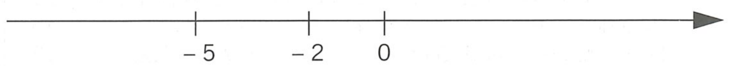
On réduit $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$ au même dénominateur : $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$ et $\frac{6}{7} = \frac{6 \times 4}{7 \times 4} = \frac{24}{28}$.

Comme $21 < 24$, on a $\frac{21}{28} < \frac{24}{28}$ donc $\frac{3}{4} < \frac{6}{7}$.

On aurait pu aussi calculer : $\frac{3}{4} = 0{,}75$ et $\frac{6}{7} \approx 0{,}857$ d'où $\frac{3}{4} < \frac{6}{7}$.

– 5 et – 2 sont tous deux négatifs. Celui qui a la plus grande valeur absolue est – 5 ; donc $-5 < -2$.

Graphiquement :








## Diviseurs et multiples

Exercice **1.**

**> Parmi les nombres suivants quels sont ceux qui sont divisibles par 2, 3, 5, 9 ?**
839, 493, 972, 2 610, 7 308.

Exercice **2.**

**> Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres suivants :**
45, 120, 78, 147, 337.

Exercice **3.**

**> Trouver les PGCD de :**
80 et 120 ; 140 et 350.

Exercice **4.**

Un client remet deux paquets de liasses de billets de banque comportant l'un 320 billets, l'autre 448. Il a composé ses liasses de manière que le nombre de billets contenus dans chaque liasse soit égal et le plus élevé possible.

**> Calculer le nombre de billets de chaque liasse et le nombre de liasses contenues dans chaque paquet.**

Exercice **5.**

Un commerçant désire écouler totalement un stock de 180 paquets de biscuits, 450 tablettes de chocolat et 630 sucettes. Pour cela il confectionne des colis-réclames, tous identiques.

**> Sachant qu'il fait le plus grand nombre possible de colis, on demande le nombre de colis et la composition de chacun d'eux.**

Exercice **6.**

**> Trouver le PPCM de :**
36 et 45 ; 48 et 180.

## CORRIGÉS

Exercice **1.** Sont divisibles par 2 : 972 ; 2 610 ; 7 408.

Sont divisibles par 3 : 972 (car $9 + 7 + 2 = 18$) ; 2 610 (car $2 + 6 + 1 = 9$) ; 7 308 (car $7 + 3 + 8 = 18$).

Est divisible par 5 : 2 610.

Sont divisibles par 9 : 972 (car $9 + 7 + 2 = 18$ et 7 308 (car $7 + 3 + 8 = 18$).

Exercice **2.** $45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$ ;

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$ ;

$78 = 2 \times 3 \times 13$ ; $147 = 3 \times 7^2$ ; 337 est un nombre premier.

Exercice **3.** $80 = 2^4 \times 5$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ ; le PGCD est $2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$ ;
$140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $350 = 2 \times 5^2 \times 7$ ; le PGCD est $2 \times 5 \times 7 = 70$.

Exercice **4.** Le nombre de billets de chaque liasse est le plus grand diviseur commun à 320 et 448.

On a *y* $320 = 2^6 \times 5$ et $448 = 2^6 \times 7$.

Le PGCD est $2^6 = 64$.

Il y a 64 billets dans chaque liasse.

Le premier paquet comporte $320 \div 64 = 5$ liasses.

Le second paquet comporte $448 \div 64 = 7$ liasses.

Exercice **5.** Le nombre de colis est un diviseur commun à 180, 450 et 620, et le plus grand possible, donc leur PGCD.

On a : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ; $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ ; $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

Le PGCD est : $2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

Il y a donc 90 colis.

Chaque colis contient : $180 \div 90 = 2$ paquets de biscuits ; $450 \div 90 = 5$ tablettes de chocolat ; $630 \div 90 = 7$ sucettes.

Exercice **6.** $36 = 2^2 \times 3^2$ ; $45 = 3^2 \times 5$ ; le PPCM est $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ ; $48 = 2^4 \times 3$ ; $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ; le PPCM est $2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$.

Exercice **7.**

Trois autocars partent de la même station pour effectuer des navettes vers des endroits différents. Il y a un départ du premier toutes les 12 minutes, du second toutes les 42 minutes, et du troisième toutes les 21 minutes. Ils sont partis ensemble à 14 heures.

**> À quelle heure se retrouveront-ils ensemble à la station de départ ?**

## Fractions

Exercice **8.**

**> Trouver des fractions égales à $\frac{3}{7}$ ayant pour dénominateurs 56, 77 et 168.**

Exercice **9.**

**> Simplifier les fractions :**

$\frac{105}{225}$ ; $\frac{108}{630}$ ; $\frac{98}{140}$.

Exercice **10.**

**> Simplifier, puis réduire au même dénominateur, les fractions :**

**a.** $\frac{39}{180}$ et $\frac{35}{200}$.

**b.** $\frac{60}{280}$, $\frac{99}{315}$ et $\frac{75}{840}$.

## CORRIGÉS

Exercice **7.** Ils se trouveront ensemble au bout d'un temps qui est le plus petit multiple commun à 12, 42 et 21.

On a : $12 = 2^2 \times 3$ ; $42 = 2 \times 3 \times 7$ ; $21 = 3 \times 7$ ; le PPCM est $2^2 \times 3 \times 7 = 84$.

On a 84 min = 60 min + 24 min = 1 h 24 min.
Ils se retrouveront ensemble à 15 h 24 min.

Exercice **8.**
On a $56 = 7 \times 8$,

d'où $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56}$ ;

$77 = 7 \times 11$

d'où $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 11}{7 \times 11} = \frac{33}{77}$ ;

$168 = 7 \times 24$

d'où $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 24}{7 \times 24} = \frac{72}{168}$.

Exercice **9.**

$\frac{105}{225} = \frac{5 \times 21}{5 \times 45} = \frac{21}{45} = \frac{3 \times 7}{3 \times 15} = \frac{7}{15}$

$\frac{108}{630} = \frac{2 \times 54}{2 \times 315} = \frac{54}{315} = \frac{9 \times 6}{9 \times 35} = \frac{6}{35}$

$\frac{98}{140} = \frac{2 \times 49}{2 \times 70} = \frac{49}{70} = \frac{7 \times 7}{7 \times 10} = \frac{7}{10}$.

Exercice **10.** **a.** $\frac{39}{180} = \frac{3 \times 13}{3 \times 60} = \frac{13}{60}$ ;

$\frac{35}{200} = \frac{5 \times 7}{5 \times 40} = \frac{7}{40}$.

On a : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $40 = 2^3 \times 5$.

Le PPCM est $2^3 \times 3 \times 5 = 120$

d'où $\frac{13}{60} = \frac{13 \times 2}{60 \times 2} = \frac{26}{120}$

et $\frac{7}{40} = \frac{7 \times 3}{40 \times 3} = \frac{21}{120}$.

**b.** $\frac{60}{280} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ ; $\frac{99}{315} = \frac{9 \times 11}{9 \times 35} = \frac{11}{35}$ ;

$\frac{75}{840} = \frac{5 \times 15}{5 \times 168} = \frac{15}{168} = \frac{3 \times 5}{3 \times 56} = \frac{5}{56}$.

On a : $14 = 2 \times 7$ ; $35 = 5 \times 7$ ; $56 = 2^3 \times 7$ ; le PPCM est $2^3 \times 5 \times 7 = 280$.

D'où : $\frac{3}{14} = \frac{3 \times 20}{14 \times 20} = \frac{60}{280}$ ;

$\frac{11}{35} = \frac{11 \times 8}{35 \times 8} = \frac{88}{280}$ ;

$\frac{5}{56} = \frac{5 \times 5}{56 \times 5} = \frac{25}{280}$.





Exercice **11.**

**> Prendre les $\frac{3}{8}$ de 48 ; les $\frac{3}{7}$ de 154.**

Exercice **12.**

Trois associés ont fondé une société au capital de 676 000 €. Le premier et le deuxième associés ont fourni les $\frac{9}{13}$ du capital. Le premier a apporté 8 000 € de plus que le second.

**> Calculer le montant des apports de chacun des associés.**

Exercice **13.**

Un commerçant a reçu une pièce de tissu de 40 m. Il en vend successivement les $\frac{2}{5}$, puis les $\frac{3}{8}$ du coupon restant.

**> Quelle longueur de ce tissu lui reste-t-il ?**

## Comparaison de nombres

Exercice **14.**

**> Ranger dans l'ordre croissant :**
5,63 ; 5,598 ; – 5,7 ; – 5,69.

Exercice **15.**

**> Comparer :**

**a.** $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ ;

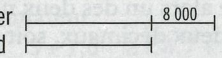
**b.** 2,3 et $\frac{13}{5}$.

## CORRIGÉS

Exercice **11.** $48 : 8 = 6$ et $3 \times 6 = 18$ donc les $\frac{3}{4}$ de 48 font 18.

$154 \div 7 = 22$ et $22 \times 3 = 66$ donc les $\frac{3}{7}$ de 154 font 66.

Exercice **12.** Apport des deux premiers associés : 468 000 € car $676\,000 \div 13 = 52\,000$ et $52\,000 \times 9 = 468\,000$.

Schématisations :
part du premier
part du second



On obtient donc la part du second en retranchant 8 000 et en divisant par 2.

On a : 468 000 – 8 000 = 460 000 et 460 000 ÷ 2 = 230 000 €.

Part du premier : 230 000 + 8 000 = 238 000 €.
Part du troisième :
676 000 – 468 000 = 208 000 €.

Exercice **13.** Les $\frac{2}{5}$ de 40 m font 16 m (car $40 \div 5 = 8$ et $8 \times 2 = 16$).

Il reste $40 - 16 = 24$ m.

Les $\frac{3}{8}$ de 24 m font 9 m (car $24 \div 8 = 3$ et $3 \times 3 = 9$).

Il reste : $24 - 9 = 15$ m.

Exercice **14.** Comparons les deux nombres positifs : $5{,}598 < 5{,}63$ car le chiffre des dixièmes de 5,598 qui est 5, est plus petit que celui de 5,63 qui est 6.

Comparons les deux nombres négatifs : $-5{,}7 < -5{,}69$ car la valeur absolue de – 5,7 qui est 5,7 est plus grande que celle de – 5,69 qui est 5,69.

On sait que les nombres négatifs sont inférieurs aux nombres positifs.

Finalement : $-5{,}7 < -5{,}69 < 5{,}598 < 5$.

Exercice **15.** **a.** On a $\frac{2}{3} \approx 0{,}66$ et $\frac{1}{2} \approx 0{,}5$ d'où $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.

**b.** on a $\frac{13}{5} = 2{,}6$ d'où $2{,}3 < 2{,}6$.

# 23 CALCUL NUMÉRIQUE

**Il faut savoir calculer avec les différents nombres (décimaux, fractions, relatifs). Nous supposons acquises les opérations sur les décimaux, et allons rappeler les règles de calcul sur les fractions et les relatifs. Nous verrons également les conventions d'écritures et les règles à respecter dans une suite d'opérations.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Règles de calcul avec les fractions

**Multiplication.** Le produit de deux ou plusieurs fractions est une fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs et le dénominateur le produit des dénominateurs.

Exemple $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$.

**Division.** L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$, où $a$ et $b$ sont des entiers non nuls.

Exemple L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$.

Pour diviser une fraction par une fraction on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

Exemple $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$.

**Addition et soustraction.** La somme (ou la différence ) de deux fractions de même dénominateur est une fraction dont le numérateur est la somme (ou la différence ) des numérateurs, et dont le dénominateur est le dénominateur commun.

Exemple $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$ ; $\frac{8}{13} - \frac{5}{13} = \frac{8-5}{13} = \frac{3}{13}$.

Si les dénominateurs sont différents, on commence par mettre les fractions au même dénominateur.

Exemple Calculer $\frac{5}{3} + \frac{6}{11}$. On a : $\frac{5}{3} = \frac{5 \times 11}{3 \times 11} = \frac{55}{33}$ et $\frac{6}{11} = \frac{6 \times 3}{11 \times 3} = \frac{18}{33}$.

On additionne : $\frac{55}{33} + \frac{18}{33} = \frac{73}{33}$. Finalement : $\frac{5}{3} + \frac{6}{11} = \frac{73}{33}$.

Remarque : il se peut que l'on ait à effectuer une opération sur deux nombres dont un seul est une fraction. On transforme alors un des deux nombres pour obtenir le calcul le plus simple possible, soit sur deux décimaux, soit sur deux fractions.

Exemple Calculer $\frac{3}{4} + 1{,}7$. On sait que $\frac{3}{4} = 0{,}75$. D'où : $\frac{3}{4} + 1{,}7 = 0{,}75 + 1{,}7 = 2{,}45$.

Calculer $\frac{3}{7} + 3$. On sait que $3 = \frac{3}{1}$. D'où : $\frac{3}{7} + 3 = \frac{3}{7} + \frac{3}{1}$. On a : $\frac{3}{1} = \frac{3 \times 7}{1 \times 7} = \frac{21}{7}$ et $\frac{3}{7} + \frac{21}{7} = \frac{24}{7}$ ; finalement : $\frac{3}{7} + 3 = \frac{24}{7}$.

### Règles de calcul avec les nombres relatifs

**Addition.** Si les nombres ont le même signe, la somme est un nombre dont le signe est le signe commun et dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues.

Exemple $(+3) + (+5) = +8$ ; $2{,}5 + 6{,}7 = 9{,}2$ ;
$(-2) + (-3) = (-5)$.



Si les nombres sont de signe contraire, la somme est un nombre dont le signe est celui du nombre qui a la plus grande valeur absolue, et dont la valeur absolue est la différence des valeurs absolues.

Exemple $(+3) + (-5) = (-2)$.

**Soustraction.** Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

Exemple $(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = (+8) = 8$.

**Multiplication et division.** Si les nombres sont de même signe, le produit (ou le quotient) est un nombre positif dont la valeur absolue est le produit (ou le quotient) des valeurs absolues.

Exemple $(+3) \times (+5) = (+15)$ ;
$(-2) \times (-7) = (+14)$.

Si les nombres sont de signe contraire, le produit (ou le quotient) est un nombre négatif dont la valeur absolue est le produit (ou le quotient) des valeurs absolues.

Exemple $(+3) \times (-5) = (-15)$.

### Suite d'opérations

**Suite d'opérations sans parenthèses.** En l'absence de parenthèses :

– une suite d'additions et de soustractions s'effectue de gauche à droite. Il en est de même pour une suite de multiplications et de divisions ;

Exemple $8{,}3 - 2{,}4 - 4{,}5 = 5{,}9 - 4{,}5 = 1{,}4$ ;
$12 \div 4 \times 3 = 3 \times 3 = 9$.

– les multiplications ou les divisions s'effectuent avant les additions ou les soustractions (règle de priorité).

Exemple $5 + 3 \times 7 = 5 + 21 = 26$ (il est faux de commencer par additionner 5 et 3 !)

$18 \div 3 + 3 = 6 + 3 = 9$ ; $2 + \frac{3}{5} + 7 = 2 + 0{,}6 + 7 = 2{,}6 + 7 = 9{,}6$.

**Suite d'opérations avec parenthèses.** Les opérations placées entre parenthèses doivent être effectuées en premier.

Exemple $3 \times (2 + 8) - (9 - 5) = 3 \times 10 - 4 = 30 - 4 = 26$.

À l'intérieur des parenthèses, les règles de priorité s'appliquent.

Exemple $27 - (2 + 3 \times 2) = 27 - (2 + 6) = 27 - 8 = 19$.

Lorsqu'il y a plusieurs niveaux de parenthèses, on commence par effectuer les calculs dans les parenthèses les plus à l'intérieur.

Exemple $3 \times [12 - (8 - 5)^2] = 3 \times [12 - 3^2] = 3 \times [12 - 9] = 3 \times 3 = 9$.

**Suite d'opérations avec un rapport.** Un rapport est une division écrite à l'aide d'un trait horizontal.

L'expression située au-dessus du trait est le numérateur, celle située au-dessous est le dénominateur

Exemple $\frac{2{,}5}{7{,}4}$ ; $\frac{3 + 1{,}6}{12}$ ; $\frac{2 \times 4{,}7 + 3}{8 \times 0{,}5}$ sont des rapports.

Dans le rapport $\frac{2 \times 4{,}7 + 3}{8 \times 0{,}5}$, le numérateur est $2 \times 4{,}7 + 3$ ; le dénominateur est $8 \times 0{,}5$.

Par convention, le trait du rapport sous-entend que tout le numérateur doit être considéré comme s'il était entre parenthèses, de même que le dénominateur.

Exemple $\frac{2 \times 4{,}7 + 3}{8 \times 0{,}5} = (2 \times 4{,}7 + 3) \div (8 \times 0{,}5)$.

Il faut donc appliquer les règles de priorité pour effectuer les calculs :

Exemple $\frac{2 \times 4{,}7 + 3}{8 \times 0{,}5} = \frac{9{,}4 + 3}{4} = \frac{12{,}4}{4} = 3{,}1$.

## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Le calcul numérique demande de la pratique pour s'approprier ses règles et les méthodes qui permettent de gagner du temps.

### Calculer avec des fractions

Avant d'appliquer les règles de calcul, on regarde s'il est utile de simplifier les fractions. On regarde également si on peut simplifier le résultat obtenu.

Exemple **Calculer a. $\frac{14}{24}+\frac{12}{45}$ ; b. $\frac{138}{63}-\frac{15}{25}$.**

**a.** On simplifie : $\frac{14}{24}=\frac{14\div 2}{24\div 2}=\frac{7}{12}$ ; $\frac{12}{45}=\frac{12\div 3}{45\div 3}=\frac{4}{15}$.
On réduit au même dénominateur : comme $12 = 2^2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$, le PPCM de 12 et 15 est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.
$\frac{7}{12}=\frac{7\times 5}{12\times 5}=\frac{35}{60}$ ; $\frac{4}{15}=\frac{4\times 4}{15\times 4}=\frac{16}{60}$. On a : $\frac{35}{60}+\frac{16}{60}=\frac{51}{60}$.
On simplifie : $\frac{51}{60}=\frac{51\div 3}{60\div 3}=\frac{17}{20}$. Finalement : $\frac{14}{24}+\frac{12}{45}=\frac{17}{20}$.

**b.** On simplifie : $\frac{138}{63}=\frac{138\div 3}{63\div 3}=\frac{46}{21}$ ; $\frac{15}{25}=\frac{15\div 5}{25\div 5}=\frac{3}{5}$.
On réduit au même dénominateur : en prenant $21 \times 5 = 105$ comme dénominateur commun
$\frac{46}{21}=\frac{46\times 5}{21\times 5}=\frac{230}{105}$ ; $\frac{3}{5}=\frac{3\times 21}{5\times 21}=\frac{63}{105}$. On a : $\frac{230}{105}-\frac{63}{105}=\frac{167}{105}$.
Finalement : $\frac{138}{63}-\frac{15}{25}=\frac{167}{105}$.

**Calculer a. $\frac{20}{48}\times\frac{21}{24}$ ; b. $\frac{3}{7}\times 5$**

**a.** On simplifie : $\frac{20}{48}=\frac{20\div 4}{48\div 4}=\frac{5}{12}$ ; $\frac{21}{24}=\frac{21\div 3}{24\div 3}=\frac{7}{8}$.
On multiplie : $\frac{5}{12}\times\frac{7}{8}=\frac{5\times 7}{12\times 8}=\frac{35}{96}$.

**b.** Le nombre 5 peut s'écrire sous forme de fraction : $5=\frac{5}{1}$.
On multiplie : $\frac{3}{7}\times\frac{5}{1}=\frac{3\times 5}{7\times 1}=\frac{15}{7}$.

**Calculer a. $\frac{3}{2}\div\frac{7}{5}$ ; b. $3\div\frac{5}{8}$.**

**a.** L'inverse de $\frac{7}{5}$ est $\frac{5}{7}$. D'où : $\frac{3}{2}\div\frac{7}{5}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{14}$.

**b.** L'inverse de $\frac{5}{8}$ est $\frac{8}{5}$. D'où : $3\div\frac{5}{8}=3\times\frac{8}{5}=\frac{3}{1}\times\frac{8}{5}=\frac{24}{5}$.

### Résoudre des problèmes où interviennent des fractions

Se souvenir que prendre une fraction d'une grandeur, c'est multiplier cette grandeur par la fraction

Exemple **Un promoteur acquiert un terrain pour 49 600 €. Il le revend après l'avoir divisé en quatre parcelles : la première parcelle représente les $\frac{3}{10}$ de la surface du terrain, la deuxième en représente les $\frac{5}{18}$, la troisième les $\frac{4}{15}$ ; la quatrième a une aire de 1 680 m2. Calculer l'aire du terrain.**





Les trois premières parcelles représentent $\left(\frac{3}{10}+\frac{5}{18}+\frac{4}{15}\right)$ de la surface totale. Pour additionner ces fractions, on les réduit au même dénominateur.
Comme $10 = 2 \times 5$ ; $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ ; $15 = 3 \times 5$, le PPCM est $2 \times 3^2 \times 5 = 90$.
$\frac{3}{10}=\frac{3\times 9}{10\times 9}=\frac{27}{90}$ ; $\frac{5}{18}=\frac{5\times 5}{18\times 5}=\frac{25}{90}$ ; $\frac{4}{15}=\frac{4\times 6}{15\times 6}=\frac{24}{90}$ ; $\frac{27}{90}+\frac{25}{90}+\frac{24}{90}=\frac{76}{90}$ et
$\frac{76}{90}=\frac{76\div 2}{90\div 2}=\frac{38}{45}$.

Les trois premières parcelles représentent $\frac{38}{45}$ de la surface totale. Le reste, 1 680 m$^2$, en représente : $\frac{45}{45}-\frac{38}{45}=\frac{7}{45}$. D'où : aire du terrain $\times\frac{7}{45}=1\,680$.

L'aire du terrain est donc le quotient de 1 680 par $\frac{7}{45}$ :

$1\,680\div\frac{7}{45}=1\,680\times\frac{45}{7}=\frac{1\,680\times 45}{7}=10\,800$. L'aire du terrain est de 10 800 m$^2$.

### Calculer avec des nombres relatifs

Exemple **Calculer (+ 3) + (– 4).**
+ 3 et – 4 sont de signes contraires; donc on soustrait leur valeur absolue : 4 – 3 = 1.
Comme 4 est plus grand que 3, le résultat est du signe qui est devant 4, c'est-à-dire –.
D'où : (+ 3) + (– 4) = – 1.

**Calculer (+ 3) – (+ 4).**
L'opposé de (+ 4) est (– 4). D'où (+ 3) – (+ 4) = (+3) + (– 4) = – 1.

**Calculer (+ 3) × (+ 4) et (– 3) × (– 4).**
(+ 3) × (+ 4) = + 12 ou 12 ; (– 3) × (– 4) = + 12 ou 12.
Pour ces deux calculs, le produit est positif car les deux facteurs sont soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs.

**Calculer a. (+ 6) ÷ (+ 2) et (– 6) ÷ (– 2) ; b. (+ 6) ÷ (– 2).**
**a.** (+ 6) ÷ (+ 2) = + 3 (ou 3) ; (– 6) ÷ (– 2) = + 3 (ou 3).
Pour ces deux calculs, le quotient est positif car les deux nombres sont soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs.
**b.** (+ 6) ÷ (– 2) = – 3. Le quotient est négatif car les deux facteurs sont de signes contraires.

### Effectuer une suite d'opérations

Il faut faire très attention aux règles de priorité. On effectue dans l'ordre :
– les calculs placés entre parenthèses, ou au numérateur et au dénominateur d'un rapport,
– les multiplications et divisions,
– les additions et soustractions.

Exemple **Calculer a. 42,7 – 3 × 2,6 ; b. (5 + 4 × 2) × 3 – (7 + 3 × 2).**
**a.** Il faut effectuer la multiplication en premier :
42,7 – 3 × 2,6 = 42,7 – 7,8 = 34,9.
**b.** Il faut effectuer les calculs entre parenthèses en premier :
(5 + 4 × 2) × 3 – (7 + 3 × 2) = (5 + 8) × 3 – (7 + 6) = 13 × 3 – 13 = 39 – 13 = 26.

Exercice **1. Calcul avec des fractions**

**1. Mettre sous forme de nombre décimal :**

$\frac{125}{10}$ ; $\frac{88}{100}$ ; $\frac{115}{100}$ ; $\frac{203}{1\,000}$ ; $\frac{4}{5}$ ; $\frac{18}{4}$ ; $\frac{1}{8}$.

**2. Mettre sous forme de fraction :**

2,3  0,12  1,18  25,02  3,25  0,75.

**3. Calculer :**

a. $\frac{2}{7}+\frac{5}{6}$  c. $\frac{12}{18}+\frac{25}{15}$

b. $\frac{4}{9}+\frac{7}{8}$  d. $\frac{14}{18}-\frac{10}{24}$

**4. Calculer :**

$3{,}5+\frac{4}{3}$ ; $\frac{24}{7}-\frac{2}{3}$

**5. Calculer :**

a. $\frac{5}{7}\times\frac{12}{11}$

b. $\frac{25}{18}\times\frac{21}{25}$

c. $\frac{38}{28}\times\frac{7}{33}$

d. $3\times\frac{6}{7}$

**6. Déterminer l'inverse des nombres :**

$\frac{4}{5}$ ; $\frac{18}{7}$ ; 2 ; $\frac{1}{3}$ ; 6,4.

## CORRIGÉS

Exercice **1.**

**1.** En divisant le numérateur par le dénominateur, on obtient : 12,5 ; 0,88 ; 1,15 ; 0,203 ; 0,8 ; 4,5 ; 0,125.

**2.** $2{,}3=\frac{23}{10}$ ; $0{,}12=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$ ;

$1{,}18=\frac{118}{100}=\frac{59}{50}$ ; $25{,}02=\frac{2\,502}{100}=\frac{1\,251}{50}$ ;

$3{,}25=\frac{325}{100}=\frac{13}{4}$ ; $0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

**3. a.** Le dénominateur commun à $\frac{2}{7}$ et $\frac{5}{6}$ est $6\times7=42$. D'où :

$\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{2\times6}{7\times6}+\frac{5\times7}{6\times7}=\frac{12}{42}+\frac{35}{42}=\frac{47}{42}$.

**b.** De même : $\frac{4}{9}+\frac{7}{8}=\frac{4\times8}{9\times8}+\frac{7\times9}{8\times9}=\frac{95}{72}$.

**c.** On simplifie : $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$ et $\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$ d'où

$\frac{12}{18}+\frac{25}{15}=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$.

**d.** On simplifie : $\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$ et $\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$. Comme $9=3\times3$ et $12=3\times4$, le dénominateur commun est $3\times3\times4=36$.

D'où $\frac{7}{9}-\frac{5}{12}=\frac{28}{36}-\frac{15}{36}=\frac{13}{36}$.

**4.** $3{,}5+\frac{4}{3}=\frac{35}{10}+\frac{4}{3}=$

$\frac{35\times3}{10\times3}+\frac{4\times10}{3\times10}=\frac{145}{30}=\frac{29}{6}$.

$\frac{24}{7}-2{,}3=\frac{24}{7}-\frac{23}{10}=\frac{240}{70}-\frac{161}{70}=\frac{79}{70}$.

**5. a.** $\frac{5}{7}\times\frac{12}{11}=\frac{5\times12}{7\times11}=\frac{60}{77}$.

**b.** $\frac{25}{18}\times\frac{21}{25}=\frac{25\times21}{18\times25}$. On voit qu'on peut simplifier par 25 et que 21 et 18 sont divisibles par 3.

D'où $\frac{25\times21}{18\times25}=\frac{1\times7}{6\times1}=\frac{7}{6}$.

**c.** On simplifie : $\frac{38}{28}=\frac{19}{14}$.

D'où : $\frac{38}{28}\times\frac{7}{33}=\frac{19}{14}\times\frac{7}{33}=\frac{19\times7}{14\times33}$.

En simplifiant par 7 on obtient : $\frac{19}{66}$.

**d.** $3\times\frac{6}{7}=\frac{3}{1}\times\frac{6}{7}=\frac{3\times6}{1\times7}=\frac{18}{7}$.

**6.** En inversant numérateur et dénominateur, on obtient :

$\frac{5}{4}$ ; $\frac{7}{18}$ ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{3}{1}=3$ ; $\frac{1}{6{,}4}=\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$.







**7. Calculer :**

a. $\frac{3}{7}\div\frac{9}{5}$  c. $\frac{5}{9}\div6$

b. $\frac{18}{24}\div\frac{15}{9}$  d. $2\div\frac{6}{7}$

Exercice **2. Problèmes avec des fractions**

**1.** Un commerçant propose, pour l'achat d'une télévision, l'un des deux modes de règlements suivants :

– paiement comptant : 1 080 €

– versement des $\frac{5}{18}$ du paiement comptant à la commande, puis des $\frac{4}{27}$ du paiement comptant à la livraison, et 6 versements échelonnés de 120 € chacun.

**a. Quelle majoration du prix entraîne le paiement à crédit ?**

**b. Exprimer cette majoration en une fraction du paiement comptant.**

**2.** Un emprunteur rembourse à son créancier les $\frac{3}{14}$ de sa dette en janvier, les $\frac{5}{21}$ en avril, les $\frac{3}{18}$ en décembre.

**a. Quelle fraction de sa dette a-t-il remboursée au total ?**

**b. Quelle est la fraction de la dette qui reste à rembourser ?**

**3.** Le bénéfice d'une société est partagé entre quatre associés :

– le premier reçoit les $\frac{12}{70}$ du bénéfice ;

– le deuxième reçoit les $\frac{16}{84}$ du bénéfice ;

– le troisième reçoit 8 000 € ;

– la part du quatrième associé est les $\frac{27}{40}$ de celle du troisième associé.

**a. Quelle est le bénéfice total de la société ?**

**b. Quelle est la part perçue par chaque associé ?**

## CORRIGÉS

**7. a.** $\frac{3}{7}\div\frac{9}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{9}=\frac{3\times5}{7\times9}=\frac{1\times5}{7\times3}=\frac{5}{21}$.

**b.** On simplifie : $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$ et $\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$.

D'où : $\frac{18}{24}\div\frac{15}{9}=\frac{3}{4}\div\frac{5}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$.

**c.** $\frac{5}{9}\div6=\frac{5}{9}\div\frac{6}{1}=\frac{5}{9}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{54}$.

**d.** $2\div\frac{6}{7}=2\times\frac{7}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$.

Exercice **2.**

**1. a.** Versement à la commande :

$1\,080\times\frac{5}{18}=300$ €.

Versement à la livraison : $1\,080\times\frac{4}{27}=160$ €.

Total des 6 versements : $6\times120=720$ €.

Montant du paiement à crédit :
$300+160+720=1\,180$ €.

Majoration du prix : $1\,180-1\,080=100$ €.

**b.** $\frac{100}{1\,080}=\frac{10}{108}=\frac{5}{54}$ du paiement comptant.

**2. a.** $\frac{3}{14}+\frac{5}{21}+\frac{1}{6}=\frac{9}{42}+\frac{10}{42}+\frac{7}{42}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$.

**b.** Il reste à rembourser : $\frac{21}{21}-\frac{13}{21}=\frac{8}{21}$ de la dette.

**3. a.** Part du 4[e] associé : $8\,000\times\frac{27}{40}=5\,400$ €.

Part des deux premiers :

$\frac{12}{70}+\frac{16}{84}=\frac{6}{35}+\frac{4}{21}=\frac{18}{105}+\frac{20}{105}=\frac{38}{105}$.

Il reste pour les deux autres : $\frac{105}{105}-\frac{38}{105}=\frac{67}{105}$.

Cette fraction du bénéfice représente :
$8\,000+5\,400=13\,400$ €.

On a donc : bénéfice $\times\frac{67}{105}=13\,400$ €. On obtient le bénéfice en divisant 13 400 par $\frac{67}{105}$ :

$13\,400\div\frac{67}{105}=13\,400\times\frac{105}{67}=21\,000$ €.

**b.** Part du 1[er] : $21\,000\times\frac{6}{35}=3\,600$ €.

Part du 2[e] : $21\,000\times\frac{4}{21}=4\,000$ €.

# 24 PUISSANCES - RACINE CARRÉE

**Les puissances sont utilisées pour exprimer des aires, des volumes, et pour faciliter l'écriture de nombres très petits ou très grands. Les racines carrées sont utilisées en particulier pour exprimer des longueurs connaissant des aires ou des volumes, ou en géométrie avec le théorème de Pythagore.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Puissance d'un nombre

Le produit d'un nombre plusieurs fois par lui-même peut s'écrire sous forme d'une puissance :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad (n \text{ étant un nombre entier supérieur à } 1).$$

$a^n$ se lit : « a puissance $n$ » ($a^2$ se lit « $a$ au carré » ; $a^3$ se lit « $a$ au cube »). Le nombre $n$ est appelé exposant.

Exemple $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ et l'exposant de $3^4$ est 4 ;
$(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$.

Par convention : $a^0 = 1$ ; $a^1 = a$ ; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$.

Exemple $7^0 = 1$ ; $6^1 = 6$ ; $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$.

### Formules de calcul

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \; ; \; \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \; ; \; (a^n)^p = a^{n \times p} \; ; \; (a \times b)^n = a^n \times b^n \; ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemple $2^4 \times 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$ ; $\dfrac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$ ; $(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6$ ;

$(2 \times 7)^2 = 2^2 \times 7^2$ ; $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1^2}{5^2} = \dfrac{1}{5^2}$

### Puissances de 10

$$10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ zéros}} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{a^n} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ zéros}}$$

Exemple $10^4 = 10\,000$ ; $10^{-3} = 0{,}001$.

### Écriture scientifique des nombres

Tout nombre décimal N positif et différent de 0 peut s'écrire sous la forme suivante appelée écriture scientifique : $N = a \times 10^p$ avec $1 \leqslant a < 10$ et $p$ entier relatif.

Exemple $35\,000\,000 = 3{,}5 \times 10^7$ ; $0{,}000\,03 = 3 \times 10^{-5}$.

### Racine carrée d'un nombre positif

La racine carrée d'un nombre positif A est le nombre positif $x$ tel que $x^2 = A$.

Pour écrire une racine carrée on utilise le symbole « $\sqrt{\ }$ », appelé radical. On écrit : $x = \sqrt{A}$.

Puisque le nombre écrit sous le radical est un carré, ce nombre est nécessairement positif : seuls les nombres positifs ont une racine carrée.

Exemple $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$ ; $-25$ n'a pas de racine carrée.

### Formules de calcul

Pour tous nombres positifs $a$ et $b$ : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ;

Exemple $\sqrt{49 \times 25} = \sqrt{49} \times \sqrt{25} = 7 \times 5 = 35$ ; $\sqrt{\dfrac{100}{4}} = \dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \dfrac{10}{2} = 5$.





## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Les puissances sont utilisées pour exprimer des aires, des volumes, et pour faciliter l'écriture des nombres très petits ou très grands.

### Calculer avec des puissances

Il est utile de retenir la valeur de certains carrés afin d'être plus rapide lors des calculs :

$2^2 = 4$ $4^2 = 16$ $6^2 = 36$ $8^2 = 64$ $10^2 = 100$ $12^2 = 144$ $14^2 = 196$
$3^2 = 9$ $5^2 = 25$ $7^2 = 49$ $9^2 = 81$ $11^2 = 121$ $13^2 = 169$ $15^2 = 225$

Dans une suite d'opérations, on applique la règle de priorité : s'il n'y a pas de parenthèses, on calcule les puissances avant d'effectuer les multiplications (et les divisions), et donc avant les additions (et les soustractions). Sinon, les calculs entre parenthèses sont prioritaires.

Dans le cas d'une puissance d'un nombre négatif, on fera attention au signe : si l'exposant est pair, on obtient un nombre positif, si l'exposant est impair, on obtient un nombre négatif.

Exemple **Calculer a. $2 + 5^2$ ; b. $(2 + 5)^2$.**
**a.** On calcule d'abord $5^2 = 25$. D'où : $2 + 5^2 = 2 + 25 = 27$.
**b.** On calcule d'abord $2 + 5 = 7$. D'où : $(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$.
**Calculer a. $9 - 3^3$ ; b. $(-2)^3 \times 3$ ; c. $24 \div 2^3$.**
**a.** On calcule d'abord $3^3 = 27$. D'où : $9 - 3^3 = 9 - 27 = -18$.
**b.** On calcule d'abord $(-2)^3 = -8$. D'où : $(-2)^3 \times 3 = -8 \times 3 = -24$.
**c.** On calcule d'abord $2^3 = 8$. D'où $24 \div 2^3 = 24 \div 8 = 3$.
**Calculer $1\,000 - 3 \times 15^2$.**
On commence par calculer $15^2 = 225$ ; puis la multiplication : $3 \times 225 = 675$ et enfin : $1\,000 - 675 = 325$.

### Passer d'une puissance de 10 à son écriture décimale et inversement

À un exposant positif, correspond un nombre écrit sous la forme 100…0, la valeur de l'exposant indiquant combien il y a de 0 après le 1.

À un exposant négatif, correspond un nombre écrit sous la forme 0,0…01 la valeur de l'exposant indiquant combien il y a de 0 avant le 1.

Exemple **Écrire sous forme décimale : $10^4$ ; $10^{-5}$.**
L'exposant de $10^4$ est 4 : $10^4 = 10\,000$ ; l'exposant de $10^{-5}$ est $-5$ : $10^{-5} = 0{,}000\,01$.
**Écrire sous forme d'une puissance de 10 : 0,001 ; 10 000 000.**
$0{,}001 = 10^{-3}$ ; $10\,000\,000 = 10^7$.

### Utiliser les formules de calcul

Il faut choisir la bonne formule à utiliser. Pour cela, on regarde si les puissances s'appliquent à un même nombre ou à des nombres différents, et quelles sont les opérations (multiplication ou division) qui figurent dans les calculs.

Exemple **Calculer $2^3 \times 5^3$.**
On remarque qu'il s'agit du produit de deux nombres différents élevés à une puissance de même exposant. On utilise donc la formule $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ :
On a : $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1\,000$.
**Calculer $(10^{-1})^2 + \dfrac{5^3}{5^5}$.**
$(10^{-1})^2$ est une puissance élevée elle-même à une puissance, d'où la formule : $(a^n)^p = a^{n \times p}$ ;
$\dfrac{5^3}{5^5}$ est le rapport de deux puissances d'un même nombre, d'où la formule : $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.
On a : $(10^{-1})^2 = 10^{-1 \times 2} = 10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ ; $\dfrac{5^3}{5^5} = 5^{3-5} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$.
$(10^{-1})^2 + \dfrac{5^3}{5^5} = 0{,}01 + 0{,}04 = 0{,}05$.

**Mettre sous forme d'une puissance d'un seul nombre : $\frac{2^3}{5^3}$.**

Il s'agit du rapport des puissances de deux nombres différents, avec le même exposant. On utilise donc la formule : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. D'où : $\frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}4^3$

### Passer de l'écriture décimale d'un nombre à son écriture scientifique

Si le nombre est inférieur à 1, la puissance de 10 a un exposant négatif ; Si le nombre est supérieur à 1, la puissance de 10 a un exposant positif. L'ensemble des chiffres différents de 0 permet de déterminer le nombre compris entre 1 et 10 qui sera multiplié par la puissance de 10 et la place du premier de ces chiffres permet de déterminer la valeur de l'exposant.

Exemple **Écrire sous forme scientifique : a. 2 640 000 000 ; b. 0,000 057.**

**a.** L'ensemble des chiffres différents de 0 est 264. Le nombre qui sera multiplié par une puissance de 10 est donc 2,64. On a : 2 640 000 000 $= 2{,}64 \times 10^9$.

**b.** L'ensemble des chiffres différents de 0 est 57. Le nombre qui sera multiplié par une puissance de 10 est donc 5,7. On a : 0,000 057 $= 5{,}7 \times 10^{-5}$.

### Calculer la racine carrée d'un nombre

Il est utile de retenir la valeur de certaines racines carrées afin d'être plus rapide lors des calculs : $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ ; $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

Si on connaît les carrés des premiers nombres, on en déduit immédiatement les racines carrées correspondantes : par exemple, $\sqrt{64} = 8$ car $8^2 = 64$. On peut chercher à factoriser le nombre en produits de carrés parfaits.

Exemple **Calculer $\sqrt{441}$.**

On voit que 441 est divisible par 9 (car 4 + 4 + 1 = 9), et 441 ÷ 9 = 49 qui est le carré de 7. D'où : $441 = 9 \times 49$ et $\sqrt{441} = \sqrt{9 \times 49} = \sqrt{9} \times \sqrt{49} = 3 \times 7 = 21$.

On peut encadrer le nombre dont on recherche la racine carrée pour estimer la valeur de la racine.

Exemple **Estimer $\sqrt{70}$.**

On encadre 70 par deux carrés parfaits : $64 < 70 < 81$, d'où $\sqrt{64} < \sqrt{70} < \sqrt{81}$ et $8 < \sqrt{70} < 9$.

### Utiliser les formules de calcul

Il faut choisir la bonne formule en fonction des opérations (multiplication ou division) qui figurent dans les calculs.

Attention : la racine carrée de la somme de deux nombres positifs n'est pas égale à la somme des racines carrées de ces nombres. Ainsi : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mais $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Exemple **Exprimer $\sqrt{12}$ en fonction de $\sqrt{3}$.**

On remarque que 12 s'exprime sous forme d'un produit avec le facteur 3 : $12 = 3 \times 4$

On a : $\sqrt{12} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$.

**Calculer $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.**

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5.$$

**Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{3}{\sqrt{2}}$.**

Il s'agit de déterminer un rapport égal à $\frac{3}{\sqrt{2}}$, mais qui ne contient plus de racine carrée au dénominateur. Il suffit de multiplier les deux termes de $\frac{3}{\sqrt{2}}$ par $\sqrt{2}$ : $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.





## Calcul avec des puissances

Exercice **1.**

**> Calculer :**
$10^2 \times 10^{-1}$ ; $10^4 \times 10^{-2}$ ; $10^3 \times 10^{-3}$.

Exercice **2.**

**> Par quel nombre faut-il**
- multiplier $2^{10}$ pour obtenir $2^{14}$ ?
- multiplier $2^{10}$ pour obtenir $2^4$ ?
- diviser $2^{10}$ pour obtenir $2^8$ ?
- diviser $3^9$ pour obtenir $3^4$ ?

Exercice **3.**

**> Donner le résultat sous forme décimale :**

$$7 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} ; \left(\frac{2}{7}\right)^{-5} \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-4}.$$

Exercice **4.**

**> Écrire *A* sous la forme d'une fraction la plus simple possible :**

$$A = \frac{5 \times 10^5 \times (2 \times 10^{-1})^3}{24 \times 10^2}.$$

## Calcul avec des racines carrées

Exercice **5.**

**> Calculer $\sqrt{a^2 + b^2}$ dans chacun des cas suivants :**
$a = 2$ et $b = 3$ ; $a = 3$ et $b = 4$.

Exercice **6.**

**> Donner la valeur décimale arrondie au centième du nombre suivant :**
$2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$.

Exercice **7.**

**> Calculer :**

**a.** $\sqrt{2{,}25}$ ; $\sqrt{1\,600}$ ; $\sqrt{0{,}04}$ ;

**b.** $\sqrt{900}$ ; $\sqrt{0{,}36}$.

## CORRIGÉS

Exercice **1.** $10$ ; $10^2 = 100$ ; $10^0 = 1$.

Exercice **2.** Il faut multiplier $2^{10}$ par $2^4$ pour obtenir $2^{14}$ ; $2^{10}$ par $2^{-6}$ pour obtenir $2^4$.

Il faut diviser : $2^{10}$ par $2^2$ pour obtenir $2^8$ ; $3^9$ par $3^5$ pour obtenir $3^4$.

Exercice **3.**

$$7 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = 7 \times \frac{1}{6^{-3}} = 7 \times 6^3 = 1\,512.$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-5} \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{2}\right)^{5} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{4} = \frac{7^5 \times 2^4}{2^5 \times 7^4} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Exercice **4.** On simplifie par $10^2$ :

$$A = \frac{5 \times 10^3 \times (2 \times 10^{-1})^3}{24}.$$

On calcule le numérateur :
$(2 \times 10^{-1})^3 = 2^3 \times (10^{-1})^3 = 8 \times 10^{-3}$.
$5 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-3} = 40 \times 10^3 \times 10^{-3}$.
Or $10^3 \times 10^{-3} = 10^0 = 1$.
Le numérateur est donc égal à 40

$$A = \frac{40}{24} = \frac{5 \times 8}{3 \times 8} = \frac{5}{3}.$$

Exercice **5.** *Attention : la racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées.*

$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$.

$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Exercice **6.**

$2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} = 2 \times 1{,}732 + 5 \times 1{,}414 = 10{,}54.$

Exercice **7.** **a.** On peut écrire 2,25 sous la forme $\frac{225}{100} = \frac{15^2}{10^2} = \left(\frac{15}{10}\right)^2$.

On a donc : $\sqrt{2{,}25} = \frac{15}{10} = 1{,}5$.

On peut écrire 1 600 sous la forme :
$1\,600 = 16 \times 100 = 4^2 \times 10^2 = (4 \times 10)^2 = 40^2$.

On a donc : $\sqrt{1\,600} = 40$.

D'où :

$$\sqrt{0{,}04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

**b.** En procédant comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$\sqrt{900} = 30$ ; $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

# 25 APPROXIMATION - CALCUL MENTAL

**Nous allons étudier comment effectuer rapidement des calculs et des estimations numériques.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Valeur décimale approchée. Arrondi

**Valeur décimale approchée.** Un nombre peut être encadré par deux nombres entiers successifs : par exemple $5 < 5{,}7 < 6$. On dit que : 5 est la valeur entière approchée de 5,7 par défaut ; 6 est sa valeur entière approchée par excès.

De même : $4{,}3 < 4{,}38 < 4{,}4$.

4,3 est la valeur décimale approchée à un dixième près par défaut ; 4,4 est la valeur décimale approchée à un dixième près par excès.

On peut également encadrer par deux décimaux successifs qui ont deux chiffres après la virgule (on aura les valeurs approchées au centième), ou trois (valeurs approchées au millième).

Exemple 6,519 a pour valeur approchée au centième par excès : 6,2.

**Arrondi.** Arrondir un nombre à l'unité, c'est prendre le nombre entier le plus proche de ce nombre :
- si le premier chiffre après la virgule est 1, 2, 3, 4, on prend la valeur entière par défaut ;
- si le premier chiffre après la virgule est 5, 6, 7, 8, 9, on prend la valeur entière par excès.

On peut, de même, arrondir un nombre au dixième ( ou à une décimale), au centième (ou à deux décimales), au millième (ou à trois décimales).

Exemple L'arrondi au dixième de 3,14 est 3,1 ; l'arrondi au centième de 3,576 est 3,58.

### Calcul mental

Pour simplifier l'exécution d'un calcul, on peut changer l'écriture d'un nombre. Il est utile de savoir par cœur quelques résultats :

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ ; $\frac{1}{4} = 0{,}25$ ; $\frac{3}{4} = 0{,}75$ ; $\frac{1}{5} = 0{,}20$ ; $\frac{1}{10} = 0{,}1$ ; $\frac{1}{100} = 0{,}01$ ; $\frac{1}{1\,000} = 0{,}001$.

Exemple Pour calculer $\frac{3}{4} + 7$, on remplace $\frac{3}{4}$ par 0,75 : $\frac{3}{4} + 7 = 0{,}75 + 7 = 7{,}75$.

Pour multiplier mentalement par un nombre, on peut :
- décomposer le nombre sous la forme d'un produit et multiplier successivement par chacun des facteurs du produit ($35 \times 6 = (35 \times 2) \times 3 = 70 \times 3 = 210$) ;
- décomposer le nombre sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$, puis multiplier le nombre par $a$ et diviser le résultat par $b$ ($65 \times 5 = 65 \times \frac{10}{2} = 650 \div 2 = 325$) ;
- décomposer le nombre sous la forme d'une somme $a + b$ ou d'une différence $a - b$, multiplier le nombre par $a$ et par $b$, puis ajouter ou retrancher les résultats ($34 \times 9 = 34 \times (10 - 1) = 340 - 34 = 306$).

Pour effectuer mentalement soit l'addition, soit la multiplication, d'une suite de nombres, on peut changer la place des nombres ($7 + 19 + 73 = (7 + 73) + 19 = 80 + 19 = 99$ ; $4 \times 0{,}17 \times 25 = (4 \times 25) \times 0{,}17 = 100 \times 0{,}17 = 17$).

Attention : s'il y a à la fois des additions et des multiplications, c'est la règle de priorité de la multiplication sur l'addition qui s'applique ($2 + 0{,}3 \times 5 = 2 + 1{,}5 = 3{,}5$).





## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Pour être efficace en calcul mental, il faut s'entraîner et acquérir des automatismes. En plus des techniques présentées ci-dessous, vous pouvez élaborer vos propres règles personnelles.

### Effectuer mentalement une multiplication ou une division par 10, 100, 1 000

Pour multiplier un nombre décimal par 10 ; 100 ; 1 000, on déplace la virgule respectivement de 1 rang, 2 rangs, 3 rangs vers la droite en ajoutant des zéros à droite si nécessaire.

Pour diviser un nombre décimal par 10 ; 100 ; 1 000, on déplace la virgule respectivement de 1 rang, 2 rangs, 3 rangs vers la gauche en ajoutant des zéros à gauche si nécessaire.

Exemple **Calculer : $7{,}24 \times 1\,000$ ; $628 \div 100$.**

7,24 peut s'écrire 7,240. En déplaçant la virgule de 3 rangs vers la droite, on obtient $7{,}24 \times 1\,000 = 7\,240$

Pour calculer $628 \div 100$ on déplace la virgule de 2 rangs vers la gauche. On obtient : $628 \div 100 = 6{,}28$

### Trouver une valeur approchée d'un nombre

Dans le cas d'une fraction, on peut diviser le numérateur par le dénominateur. Dans le cas d'une racine carrée, on peut procéder par encadrement.

Dans certains cas, il faut connaître par cœur une valeur approchée, en particulier : $\pi \approx 3{,}14$ ; $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ ; $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ ; $\sqrt{5} \approx 2{,}23$ ; $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Exemple **Donner une valeur approchée de a. $\frac{16}{3}$ ; b. $\sqrt{30}$ ; c. $\sqrt{200}$.**

**a.** $\frac{16}{3} = 16 \div 3 = (15 + 1) \div 3 = 15 \div 3 + 1 \div 3 \approx 5 + 0{,}33$ d'où $\frac{16}{3} \approx 5{,}33$.

**b.** On encadre 30 par les carrés de deux entiers successifs : $25 < 30 < 36$, d'où $5 < \sqrt{30} < 6$ et $\sqrt{30} \approx 5{,}5$.

**c.** $\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10 \times \sqrt{2} \approx 10 \times 1{,}414$, d'où $\sqrt{200} \approx 14{,}14$.

### Effectuer mentalement un calcul

Suivant la nature des opérations, on regarde s'il est intéressant de changer l'écriture d'un nombre, de décomposer un nombre en un produit ou un quotient, s'il est possible de changer l'ordre des nombres .

Exemple **Calculer $\frac{1}{2} + 2{,}5 + 5 \times 0{,}83 \times 20$.**

D'après les règles de priorité, il faut d'abord calculer le produit $5 \times 0{,}83 \times 20$.

On voit que pour cela il est intéressant de changer l'ordre des facteurs :

$5 \times 0{,}83 \times 20 = (5 \times 20) \times 0{,}83 = 100 \times 0{,}83 = 83$

Comme il est plus facile d'additionner des nombres décimaux que des fractions, on remplace $\frac{1}{2}$ par 0,5.

Finalement, on obtient : $\frac{1}{2} + 2{,}5 + 5 \times 0{,}83 \times 20 = 0{,}5 + 2{,}5 + 83 = 3 + 83 = 86$.

### Estimer mentalement le résultat d'un calcul

On obtient une valeur approximative du résultat en remplaçant les nombres qui figurent dans le calcul par des nombres proches plus simples, permettant un calcul mental.

Exemple **Calculer une valeur approximative de $\frac{397 \times 1{,}07}{3{,}82}$.**

On remplace 397 par 400 ; 1,07 par 1 et 3,82 par 4.

On obtient : $\frac{400 \times 1}{4} = 400 \div 4 = 100$.

## Calcul mental

Exercice **1.**

**> Effectuer mentalement :**

**a.** $1{,}35 \times 10$ ; $12{,}69 \times 1\,000$ ; $15{,}8 \times 100$ ; $3{,}734 \times 100$ ; $14{,}9 \times 1\,000$ ; $0{,}305 \times 10$ ; $0{,}057 \times 1\,000$ ; $0{,}9 \times 100$ ; $10{,}02 \times 1\,000$.

**b.** $14 \times 0{,}1$ ; $17{,}2 \times 0{,}01$ ; $16{,}9 \times 0{,}001$ ; $0{,}15 \times 0{,}1$ ; $0{,}035 \times 0{,}1$ ; $0{,}17 \times 0{,}01$

**c.** $17{,}32 \div 10$ ; $15{,}57 \div 100$ ; $3{,}18 \div 1\,000$ ; $0{,}15 \div 100$ ; $32 \div 1\,000$ ; $0{,}04 \div 10$.

Exercice **2.**

**> Arrondir**

**a.** au dixième :
0,17 ; 2,13 ; 1,08 ; 2,258 ; 0,13 ; 14,083 ; 4,11 ; 0,294 ; 1,26 ; 0,49.

**b.** au centième :
4,687 ; 13,266 ; 1,682 ; 40,685 ; 55,874 ; 3,222 ; 8,859 ; 56,8744.

**c.** au millième :
5,6147 ; 1,7868 ; 6,2352 ; 134,5474 ; 341,7613 ; 3,0244 ; 12,0048.

Exercice **3.**

**> Donner une valeur approchée au dixième près par défaut de :**

**a.** $\frac{7}{3}$ **b.** $\sqrt{300}$

Exercice **4.**

**> Calculer mentalement :**

**a.** $15{,}9 + 6{,}72 + 4{,}1$ ; $7{,}25 + 1{,}79 + 4{,}25$ ; $1{,}83 + 2{,}59 + 3{,}17$.

**b.** $3 \times 5{,}1$ ; $7 \times 6{,}5$ ; $4 \times 3{,}8$ ; $2{,}7 \times 9$ ; $3{,}2 \times 5$.

**c.** $\frac{3}{4} + 1$ ; $\frac{2}{3} + 2$ ; $\frac{4}{7} + 5$ ; $\frac{9}{7} - 1$ ; $\frac{19}{3} - 4$.

**d.** $\frac{1}{7} \times \frac{1}{3}$ ; $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ ; $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5}$ ; $\frac{7}{8} \times \frac{11}{9}$.

## CORRIGÉS

Exercice **1.** **a.** 13,5 ; 12 690 ; 1 580 ; 373,4 ; 14 900 ; 3,05 ; 57 ; 90 ; 10 020.
**b.** 1,4 ; 0,172 ; 0,0169 ; 0,015 ; 0,0035 ; 0,0017.
**c.** 1,732 ; 0,1557 ; 0,00318 ; 0,0015 ; 0,032 ; 0,004.

Exercice **2.** **a.** On regarde le 2e chiffre après la virgule et on applique la règle : 0,2 ; 2,1 ; 1,1 ; 2,3 ; 0,1 ; 14,1 ; 4,1 ; 0,3 ; 1,3 ; 0,5.
**b.** On regarde le 3e chiffre après la virgule et on applique la règle : 4,69 ; 13,27 ; 1,68 ; 40,69 ; 55,87 ; 3,22 ; 8,86 ; 56,87.
**c.** On regarde le 4e chiffre après la virgule et on applique la règle : 5,615 ; 1,787 ; 6,235 ; 134,547 ; 341,761 ; 3,024 ; 12,005.

Exercice **3.**

**a.** $\frac{7}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} \approx 2 + 0{,}3$ d'où $\frac{7}{3} \approx 2{,}3$.

**b.** $\sqrt{300} = \sqrt{3 \times 100} = \sqrt{3} \times \sqrt{100} \approx 1{,}732 \times 10$

d'où $\sqrt{300} \approx 17{,}3$.

Exercice **4.**

**a.** $15{,}9 + 6{,}72 + 4{,}1 = (15{,}9 + 4{,}1) + 6{,}72 = 20 + 6{,}72 = 26{,}72$ ;
$7{,}25 + 1{,}79 + 4{,}25 = (7{,}25 + 4{,}25) + 1{,}79 = 11{,}50 + 1{,}79 = 13{,}29$ ;
$1{,}83 + 2{,}59 + 3{,}17 = (1{,}83 + 3{,}17) + 2{,}59 = 5 + 2{,}59 = 7{,}59$.

**b.** $3 \times 5{,}1 = 3 \times 5 + 3 \times 0{,}1 = 15 + 0{,}3 = 15{,}3$ ;
$7 \times 6{,}5 = 7 \times 6 + 7 \times 0{,}5 = 42 + 3{,}5 = 45{,}5$ ;
$4 \times 3{,}8 = 4 \times 4 - 4 \times 0{,}2 = 16 - 0{,}8 = 15{,}2$ ;
$2{,}7 \times 9 = 2{,}7 \times 10 - 2{,}7 \times 1 = 27 - 2{,}7$ ;
$= 27 - 3 + 0{,}3 = 24{,}3$ ;
$3{,}2 \times 5 = 3{,}2 \times \frac{10}{2} = \frac{32}{2} = 16$.

**c.** $\frac{3}{4} + 1 = 0{,}75 + 1 = 1{,}75$

ou $\frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$ ;

$\frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3} + \frac{6}{3} = \frac{8}{3}$ ; $\frac{4}{7} + 5 = \frac{4}{7} + \frac{35}{7} = \frac{39}{7}$ ;

$\frac{9}{7} - 1 = \frac{9}{7} - \frac{7}{7} = \frac{2}{7}$ ; $\frac{19}{3} - 4 = \frac{19}{3} - \frac{12}{3} = \frac{7}{3}$.

**d.** $\frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{21}$ ; $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ;

$\frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45}$ ; $\frac{7}{8} \times \frac{11}{9} = \frac{77}{72}$.







Exercice **5.**

**> Résoudre les problèmes suivants sans poser d'opérations.**

**a.** 1 kg de pâtes coûte 4,60 €. Quel est le prix de 2 kg ? Quel est le prix de 10 kg ? Quel est le prix de 12 kg ?

**b.** Un cycliste parcourt 42,5 km en 2 heures. Combien en parcourt-il en 1 heure ? Combien en parcourt-il en 4 heures ?

**c.** 10 calculatrices coûtent 97,5 €. Calculer le prix d'une calculatrice. Calculer le prix de 2 calculatrices.

**d.** La différence de deux nombres est 100. Le plus petit est 3 915,7. Quel est le plus grand ?

**e.** Le produit de deux nombres est 2,5. L'un des facteurs est 0,1. Quel est l'autre facteur ?

Exercice **6.**

**> Calculer mentalement :**

$\frac{6{,}3 \times 10^4}{2{,}1 \times 10^2}$ ; $\frac{4{,}5 \times 10^2}{0{,}5 \times 10^{-1}}$ ; $\frac{4 \times 10^{-3} \times 7 \times 10^2}{28 \times 10^{-2}}$.

Exercice **7.**

**> Estimer mentalement le résultat des calculs suivants :**

**a.** $37 \times 25{,}3 + 6{,}8$ ; $23{,}4 + 8{,}6 \times 6{,}3$.

**b.** $16{,}48 \times (23{,}9 + 25{,}8 - 8{,}4)$.

**c.** $\frac{264{,}48}{23{,}67}$ ; $\frac{20{,}048}{16{,}09}$ ; $\frac{3\,997{,}48}{9\,888{,}54}$.

**d.** $\frac{18{,}2 \times 3{,}4}{5{,}2 \times 6{,}1}$ ; $\frac{12 + 3{,}5 \times 4{,}1}{3 \times 2{,}6 + 5{,}4}$.

## CORRIGÉS

Exercice **5.** **a.** Prix de 2 kg : 9,20 € ($4{,}60 \times 2$) ;
Prix de 10 kg : 46 € ($4{,}60 \times 10$) ;
Prix de 12 kg : 55,20 € ($46 + 9{,}20$).
**b.** En 1 h : 21,25 km (la moitié de 42,5 km)
En 4 h : 85 km (le double de 42,5).
**c.** Prix d'une calculatrice : 9,75 € ($97{,}5 \div 10$)
Prix de 2 calculatrices : 19,50 € ($9{,}75 \times 2$
$= 9 \times 2 + 0{,}75 \times 2 = 18 + 1{,}50$).
**d.** Le plus grand est $3\,915{,}7 + 100 = 4\,015{,}7$.
**e.** C'est le quotient de 2,5 par 0,1 donc :

$2{,}5 \div 0{,}1 = 2{,}5 \div \frac{1}{10} = 2{,}5 \times 10 = 25$.

Exercice **6.**

$\frac{6{,}3 \times 10^4}{2{,}1 \times 10^2} = \frac{6{,}3}{2{,}1} \times \frac{10^4}{10^2}$
$= 3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300$.

$\frac{4{,}5 \times 10^2}{0{,}5 \times 10^{-1}} = \frac{4{,}5}{0{,}5} \times \frac{10^2}{10^{-1}}$
$= 9 \times 10^{2+1} = 9 \times 1\,000 = 9\,000$.

$\frac{4 \times 10^{-3} \times 7 \times 10^2}{28 \times 10^{-2}} = \frac{28 \times 10^{-1}}{28 \times 10^{-2}}$
$= 10^{-1+2} = 10^1 = 10$.

Exercice **7.**

**a.** $37 \times 25{,}3 + 6{,}8 \approx 40 \times 25 + 7 \approx 1\,000$ ;

$23{,}4 + 8{,}6 \times 6{,}3 \approx 23 + 8 \times 6 \approx 23 + 48 \approx 70$.

**b.** $16{,}48 \times (23{,}9 + 25{,}8 - 8{,}4)$
$\approx 16 \times (24 + 26 - 8) \approx 16 \times 42$
$\approx 15 \times 40 \approx 600$.

**c.** $\frac{264{,}48}{23{,}67} \approx \frac{250}{25} \approx 10$ ;

$\frac{20{,}048}{16{,}09} \approx \frac{20}{16} \approx \frac{5}{4} \approx 1{,}25$ ;

$\frac{3\,997{,}48}{9\,888{,}54} \approx \frac{4\,000}{10\,000} \approx 0{,}4$.

**d.** $\frac{18 \times 3{,}4}{5{,}2 \times 6{,}1} \approx \frac{18 \times 3}{5 \times 6} \approx \frac{18}{5 \times 2} \approx \frac{18}{10} \approx 1{,}8$ ;

$\frac{12 + 3{,}5 \times 4{,}1}{3 \times 2{,}6 + 5{,}4} \approx \frac{12 + 3{,}5 \times 4}{3 \times 3 + 5} \approx \frac{12 + 14}{9 + 5}$

$\approx \frac{26}{14} \approx 2$.

# 26 UNITÉS DE MESURE

**Les unités de mesure sont utilisées pour exprimer des longueurs, des masses, des aires, des volumes.**

## 1. Unités de longueur

Pour exprimer des longueurs, on peut utiliser des multiples ou des sous-multiples du mètre :

| Nom | Symbole | Correspondance |
|---|---|---|
| kilomètre | km | 1 km = 1 000 m |
| hectomètre | hm | 1 hm = 100 m |
| décamètre | dam | 1 dam = 10 m |
| mètre | m | |
| décimètre | dm | 1 dm = 0,1 m |
| centimètre | cm | 1 cm = 0,01 m |
| millimètre | mm | 1 mm = 0,001 m |

On utilise parfois aussi le micromètre (µm) : 1 m = $10^6$ µm.

## 2. Unités de masse

Pour exprimer des masses, on peut utiliser des multiples ou des sous-multiples du gramme :

| Nom | Symbole | Correspondance |
|---|---|---|
| kilogramme | kg | 1 kg = 1 000 g |
| hectogramme | hg | 1 hg = 100 g |
| décagramme | dag | 1 dag = 10 g |
| gramme | g | |
| décigramme | dg | 1 dg = 0,1 g |
| centigramme | cg | 1 cg = 0,01 g |
| milligramme | mg | 1 mg = 0,001 g |

On utilise aussi dans la pratique le quintal (q) :
1 q = 100 kg ; la tonne (t) : 1 t = 1 000 kg.
Remarques : 1 livre = $\frac{1}{2}$ kg = 500 g.
Dans le langage courant, on utilise le mot poids au lieu de masse.

## 3. Unités d'aire

Pour exprimer des surfaces, on peut utiliser des multiples ou des sous-multiples du mètre carré :

| Nom | Symbole | Correspondance |
|---|---|---|
| kilomètre carré | $km^2$ | 1 $km^2$ = 1 000 000 $m^2$ |
| hectomètre carré | $hm^2$ | 1 $hm^2$ = 10 000 $m^2$ |
| décamètre carré | $dam^2$ | 1 $dam^2$ = 100 $m^2$ |
| mètre carré | $m^2$ | |
| décimètre carré | $dm^2$ | 1 $dm^2$ = 0,01 $m^2$ |
| centimètre carré | $cm^2$ | 1 $cm^2$ = 0,000 1 $m^2$ |
| millimètre carré | $mm^2$ | 1 $mm^2$ = 0,000 001 $m^2$ |



Pour exprimer l'aire de terrains, on utilise parfois des unités agraires :

| Nom | Symbole | Correspondance |
|---|---|---|
| hectare | ha | 1 ha =1 $hm^2$ = 10 000 $m^2$ |
| are | a | 1a = 1 $dam^2$ = 100 $m^2$ |
| centiare | ca | 1 ca = 1 $m^2$ |

1 ha = 100 a ; 1 ca = 0,01 a
Remarque : dans le langage courant, on utilise le mot surface pour l'aire.

## 4. Unités de volume et de capacité

### Expression des volumes et des capacités

Pour exprimer des volumes, on peut utiliser des multiples ou des sous-multiples du mètre cube :

| Nom | Symbole | Correspondance |
|---|---|---|
| kilomètre cube | $km^3$ | 1 $km^3$ = 1 000 000 000 $m^3$ |
| hectomètre cube | $hm^3$ | 1 $hm^3$ = 1 000 000 $m^3$ |
| décamètre cube | $dam^3$ | 1 $dam^3$ = 1 000 $m^3$ |
| mètre cube | $m^3$ | |
| décimètre cube | $dm^3$ | 1 $dm^3$ = 0,001 $m^3$ |
| centimètre cube | $cm^3$ | 1 $cm^3$ = 0,000 001 $m^3$ |
| millimètre cube | $mm^3$ | 1 $mm^3$ = 0,000 000 001$m^3$ |

Pour exprimer des capacités, on peut utiliser des multiples ou des sous-multiples du litre :

| Nom | Symbole | Correspondance |
|---|---|---|
| hectolitre | hL | 1 hL = 100 L |
| décalitre | daL | 1 daL = 10 L |
| litre | L | |
| décilitre | dL | 1 dL = 0,1 L |
| centilitre | cL | 1 cL = 0,01 L |
| millilitre | mL | 1 mL = 0,001 L |

### Correspondance volumes - capacités

Pour convertir les unités de volume en unités de capacité (ou inversement), on utilise l'égalité :
1 litre = 1 $dm^3$.
On obtient ainsi le tableau de correspondance suivant :

| m3 | dm3 | | | cm$^3$ | | | mm$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | hL | daL | L | dL | cL | mL | |

## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Les conversions d'une unité de mesure dans une autre permettent d'effectuer des comparaisons ou des opérations.

### Convertir des unités de longueur, de masse, de capacité

Une unité de longueur, de masse ou de capacité est égale à 10 fois l'unité immédiatement inférieure.

On peut utiliser un tableau de conversion. Dans ce tableau, on place un chiffre par unité de mesure.

#### Conversion d'unités de longueur

Exemple **Exprimer 43,8 cm en dam.**

On repère le chiffre des unités : 3 (c'est le chiffre immédiatement à gauche de la virgule).
On place ce chiffre dans la colonne de l'unité de mesure donnée : cm.

| km | hm | dam | m | dm | cm | mm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0 | 4 | 3 | 8 |

On place les autres chiffres, un par unité de mesure. On complète les colonnes vides par des 0. On met la virgule à droite du chiffre des dam puisque la réponse est demandée en dam : 43,8 cm = 0,043 8 dam.

#### Conversion d'unité de masse

Exemple **Exprimer 0,095 hg en dg.**

On repère le chiffre des unités : 0 (c'est le chiffre immédiatement à gauche de la virgule).
On place ce chiffre dans la colonne de l'unité de mesure donnée : hg.

| t | q | | kg | hg | dag | g | dg | cg | mg |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **0** | 0 | 9 | 5 | | |

On place les autres chiffres, un par unité de mesure. On met la virgule à droite du chiffre des dg puisque la réponse est demandée en dg : 0,095 hg = 95 dg.

#### Conversion d'unités de capacité

Exemple **Exprimer 18 cL en daL.**

On repère le chiffre des unités : 8 (c'est le dernier chiffre à droite lorsqu'il n'y a pas de virgule).
On place ce chiffre dans la colonne de l'unité de mesure donnée : cL.

| hL | daL | L | dL | cL | mL |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 8 | |

On place les autres chiffres, un par unité de mesure. On complète les colonnes vides par des 0. On s'arrête au daL puisque la réponse est demandée en daL. On met la virgule à droite du chiffre des daL : 18 cL = 0,018 daL.

### Convertir une unité d'aire

Une unité d'aire est égale à 100 fois l'unité d'aire immédiatement inférieure. On peut utiliser un tableau de conversion. On place deux chiffres par unité de mesure.





Exemple **Exprimer 96 $hm^2$ en $m^2$.**

On repère le chiffre des unités : 6 (c'est le dernier chiffre à droite lorsqu'il n'y a pas de virgule).
On place ce chiffre dans la colonne de droite de l'unité de mesure donnée : $hm^2$.

| $km^2$ | | $hm^2$ | | $dam^2$ | | $m^2$ | | $dm^2$ | | $cm^2$ | | $mm^2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ha | | a | | ca | | | | | | | |
| | | 9 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |

On place les autres chiffres, deux par unité de mesure. On complète les colonnes vides par des 0. On s'arrête au $m^2$ puisque la réponse est demandée en $m^2$ : 96 $hm^2$ = 960 000 $m^2$.

### Convertir une unité de volume

Une unité de volume est égale à 1 000 fois l'unité de volume immédiatement inférieure. On peut utiliser un tableau de conversion. On place trois chiffres par unité de mesure.

Exemple **Exprimer 23,5 $cm^3$ en $dam^3$.**

On repère le chiffre des unités : 3 (c'est le chiffre immédiatement à gauche de la virgule).
On place ce chiffre dans la colonne de droite de l'unité de mesure donnée : $cm^3$.

| $km^3$ | | | $hm^3$ | | | $dam^3$ | | | $m^3$ | | | $dm^3$ | | | $cm^3$ | | | $mm^3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 5 | | |

On place les autres chiffres, trois par unité de mesure. On complète les colonnes vides par des 0. On met la virgule à droite du chiffre des $dam^3$ puisque la réponse est demandée en $dam^3$ : 23,5 $cm^3$ = 0,000 000 023 5 $dam^3$.

### Effectuer la correspondance volume - capacité

Exemple **Exprimer 23,5 $cm^3$ en cL.**

On repère le chiffre des unités : 3 (c'est le chiffre immédiatement à gauche de la virgule).
On place ce chiffre dans la colonne de droite de l'unité de mesure donnée : $cm^3$.

| $m^3$ | $dm^3$ | | | $cm^3$ | | | $mm^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | hL | daL | L | dL | cL | mL | |
| | | | | | 2 | 3 | 5 |

On place les autres chiffres, trois par unité de mesure. On met la virgule à droite du chiffre des cL puisque la réponse est demandée en cL : 23,5 $cm^3$ = 2,35 cL.

### Effectuer un calcul avec des unités

Exemple **Effectuer l'opération :**
**43,5 $cm^3$ + 32 dL + 0,088 $m^3$ = ... $dm^3$.**

Le résultat étant demandé en $dm^3$, il faut convertir tous les termes de l'opération dans cette même unité.

Comme 1 $dm^3$ = 1 000 $cm^3$, 1 $cm^3$ = 0,001 $dm^3$ et 43,5 $cm^3$ = 0,043 5 $dm^3$.
On sait que 32 dL = 3,2 L. Comme 1 L = 1 $dm^3$, 32 dL = 3,2 $dm^3$.
Comme 1 $m^3$ = 1 000 $dm^3$, 0,088 $m^3$ = 88 $dm^3$.
Finalement :
43,5 $cm^3$ + 32 dL + 0,088 $m^3$ = 0,043 5 $dm^3$ + 3,2 $dm^3$ + 88 $dm^3$ = 91,243 5 $dm^3$.

Exercice **1.**

**> Convertir les unités de longueur suivantes dans l'unité demandée :**
45 m en km, puis en dm.
0,789 dam en dm, puis en mm.
10 230 cm en m, puis en km.
1,787 dm en mm, puis en m.
325,62 cm en m, puis en hm.

Exercice **2.**

**> Convertir les unités de masse suivantes dans l'unité demandée :**
23,5 g en kg, puis en cg.
14 kg en g, puis en mg.
0,094 hg en kg, puis en g.
229 cg en dg, puis en hg.
46,8 mg en g, puis en dag.
13,8 kg en q, puis en t.
23,07 q en kg, puis en g.
0,082 t en q, puis en hg.

Exercice **3.**

**> Convertir les unités de capacité suivantes dans l'unité demandée :**
30,8 hL en L, puis en dL.
56 cL en L, puis en daL.
210 mL en cL, puis en daL.
2,63 L en mL, puis en hL.
0,712 daL en L, puis en hL.

Exercice **4.**

**> Convertir les unités d'aire suivantes dans l'unité demandée :**
47 $m^2$ en $cm^2$, puis en $dam^2$.
0,65 $hm^2$ en $km^2$, puis en $dm^2$.
349,5 $cm^2$ en $m^2$, puis en $mm^2$.
12,5 a en $m^2$, puis en ha.
0,32 ha en a, puis en $dam^2$.

Exercice **5.**

**> Convertir les unités de volume suivantes dans l'unité demandée :**
5,605 $m^3$ en $dm^3$, puis en $dam^3$.
310,4 $mm^3$ en $cm^3$, puis en $dm^3$.
14 $cm^3$ en $mm^3$, puis en $dm^3$.
0,015 $dam^3$ en $dm^3$, puis en $m^3$.

Exercice **6.**

**> Effectuer les conversions demandées (volumes – capacités et inversement) :**
3 000 L en $m^3$ ; 12,5 $cm^3$ en cL.
495 mL en $cm^3$ ; 21,3 $dm^3$ en cL.

Exercice **7.**

**> Effectuer les conversions demandées :**
1,3 $m^2$ = …… $cm^2$ ; 12 L = …… $cm^3$ ;
132,4 mm = …… m ; 46,7 g = …… kg ;
73 a = …… $hm^2$ ; 55,8 mL = …… L.

## CORRIGÉS

Exercice **1.** 45 m = 0,045 km = 450 dm.
0,789 dam = 78,9 dm = 7 890 mm.
10 230 cm = 102,3 m = 0,102 3 km.
1,787 dm = 178,7 mm = 0,178 7 m.
325,62 cm = 3,256 2 m = 0,032 562 hm.

Exercice **2.** 23,5 g = 0,023 5 kg = 2 350 cg.
14 kg = 14 000 g = 14 000 000 mg.
0,094 hg = 0,009 4 kg = 9,4 g.
229 cg = 22,9 dg = 0,022 9 hg.
46,8 mg = 0,046 8 g = 0,004 68 dag.
13,8 kg = 0,138 q = 0,0138 t.
23,07 q = 2 307 kg = 2 307 000 g.
0,082 t = 0,82 q = 820 hg.

Exercice **3.** 30,8 hL = 3 080 L = 30 800 dL.
56 cL = 0,56 L = 0, 056 daL.
210 mL = 21 cL = 0,021 daL.
2,63 L = 2 630 mL = 0,0263 hL.
0,712 daL = 7,12 L = 0,071 2 hL.

Exercice **4.** 47 $m^2$ = 471 000 $cm^2$ = 0,47 $dam^2$.
0,65 $hm^2$ = 0,006 5 $km^2$ = 650 000 $dm^2$.
349,5 $cm^2$ = 0,034 95 $m^2$ = 34 950 $mm^2$.
12,5 a = 1 250 $m^2$ = 0,125 ha.
0,32 ha = 32 a = 32 $dam^2$.

Exercice **5.** 5,605 $m^3$ = 5 605 $dm^3$ = 0,005 605 $dam^3$.
310,4 $mm^3$ = 0,310 4 $cm^3$ = 0,000 310 4 $dm^3$.
14 $cm^3$ = 14 000 $mm^3$ = 0,014 $dm^3$.
0,015 $dam^3$ = 15 000 $dm^3$ = 15 $m^3$.

Exercice **6.** 3 000 L = 3 $m^3$ ; 12,5 $cm^3$ = 1,25 cL.
495 mL = 495 $cm^3$ ; 21,3 $dm^3$ = 2 130 cL.

Exercice **7.** 1,3 $m^2$ = 13 000 $cm^2$ ; 12 L = 12 000 $cm^3$ ; 132,4 mm = 0,132 4 m ; 46,7 g = 0,046 7 kg ; 73 a = 0,73 $hm^2$ ; 55,8 mL = 0,055 8 L.







Exercice **8.**

**> Classer les longueurs suivantes par ordre croissant après les avoir converties dans la même unité :**
2,8 m ; 35 mm ; 13 dm ; 0,015 hm ; 210 dam.

Exercice **9.**

**> Classer les aires suivantes par ordre décroissant après les avoir converties dans la même unité :**
13 $dam^2$ ; 0,19 ha ; 66 $m^2$ ; 250 $dm^2$ ; 3,2 a.

Exercice **10.**

**> Classer les volumes suivants par ordre croissant après les avoir convertis dans la même unité.**
0,069 $m^3$ ; 45 dL ; 28,2 $dm^3$ ; 4,75 L ; 3 900 $cm^3$.

Exercice **11.**

**> Effectuer les opérations suivantes :**
2,7 $dm^3$ + 85 cL + 0,0005 $m^3$ = … $cm^3$.
13 kg – 78 hg = … g.

Exercice **12.**

Quelle est la surface, en $m^2$, d'un pré de 2 hectares et demi ?

Exercice **13.**

Un terrain a été vendu 264 000 € à raison de 5 000 € l'are.
**> Quelle est sa surface en $m^2$ ?**

Exercice **14.**

Dans un jardin de 4 ares, 12 $m^2$ sont occupés par un bassin. On trouve aussi 2 massifs de fleurs de 10,2 $m^2$ chacun. Le potager a une superficie de 0,55 $dam^2$. Le reste est engazonné.
**> Calculer l'aire du gazon en $m^2$.**

## CORRIGÉS

Exercice **8.** 35 mm ; 13 dm ; 0,015 hm ; 2,8 m ; 210 dam.

Exercice **9.** 0,19 ha ; 13 $dam^2$ ; 3,2 a ; 66 $m^2$ ; 250 $dm^2$.

Exercice **10.** 3 900 $cm^3$ ; 45 dL ; 4,75 L ; 28,2 $dm^3$ ; 0,069 $m^3$.

Exercice **11.** 2,7 $dm^3$ + 85 cL + 0,000 5 $m^3$ = 2 700 $cm^3$ + 850 $cm^3$ + 500 $cm^3$ = 4 050 $cm^3$.
13 kg – 78 hg = 13 000 g – 7 800 g = 5 200 g.

Exercice **12.** 1 ha = 10 000 $m^2$ ; 2 hectares et demi = 2 × 10 000 + 10 000 ÷ 2 = 20 000 + 5 000 = 25 000 $m^2$.

Exercice **13.** Aire du terrain :
264 000 : 5 000 = 52,8 ares = 5 280 $m^2$.

Exercice **14.** 4 ares = 400 $m^2$ ; 0,55 $dam^2$ = 55 $m^2$.
Aire du gazon : 400 – 12 – 2 × 10,2 – 55 = 312,6 $m^2$.

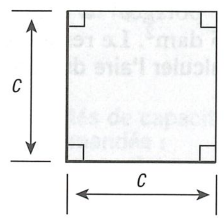
# 27 PÉRIMÈTRE - AIRE - VOLUME

**Le périmètre d'une figure plane est la longueur du contour de cette figure. L'aire d'une figure plane est la mesure de la surface de cette figure. Pour les figures les plus courantes, le périmètre, l'aire et le volume se calculent à l'aide de formules. Dans les formules suivantes, le périmètre est désigné par la lettre *p*, l'aire par la lettre *A*, et le volume par la lettre *V*. Au lieu de « volume », on utilise parfois le terme de « capacité » quand on considère que l'intérieur du solide peut être rempli.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

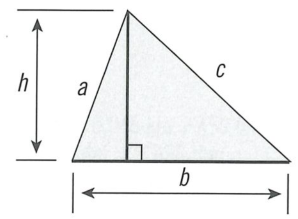
### Périmètre et aire des figures usuelles

**Carré**



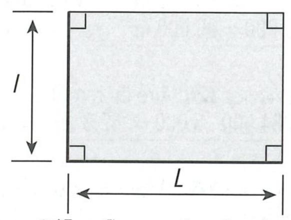

$p = 4c \qquad A = c^2$

**Triangle**



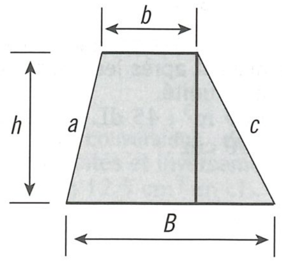

$p = a + b + c \qquad A = \dfrac{b \times h}{2}$

**Rectangle**



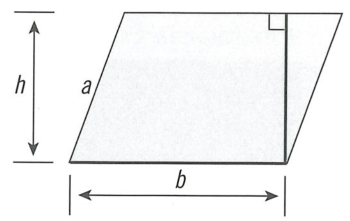

$p = 2(L + l) \qquad A = L \times l$

**Trapèze**



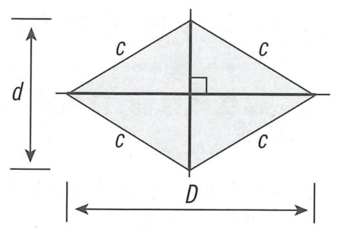

$p = a + b + c + B \qquad A = \dfrac{(B + b)h}{2}$

**Parallélogramme**




$p = 2(a + b) \qquad A = b \times h$

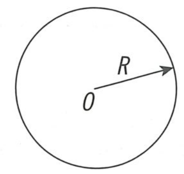
**Losange**




$p = 4c \qquad A = \dfrac{D \times d}{2}$



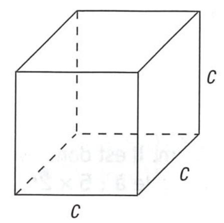
**Cercle**




$p = 2\pi R$
$A = \pi R^2$
(on prend généralement 3,14 comme valeur approchée de $\pi$)

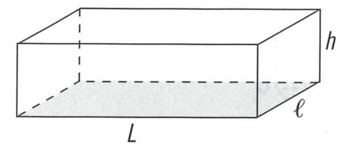
### Volume des solides usuels

**Cube**



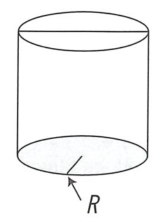

$V = c^3$

**Parallélépipède rectangle**



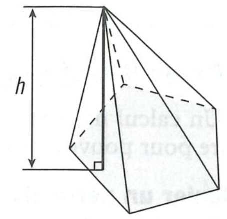

$V = L \times l \times h$

**Cylindre de révolution**




$V = \pi \times R^2 \times h$
(l'aire latérale du cylindre est égale à $4\pi rh$)

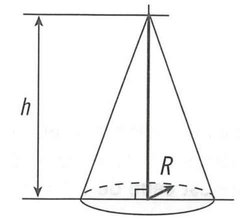
**Pyramide**




$B$ = aire de la base

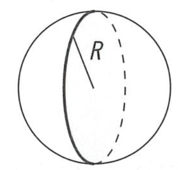
$V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$

**Cône**




$V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$

**Sphère (boule)**




$V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times R^3$

(l'aire de la sphère est égale à $4\pi r^2$)

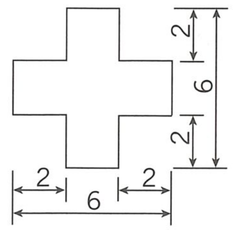
## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Un calcul de périmètre, d'aire ou de volume nécessite l'analyse préalable de la figure pour pouvoir se ramener à l'application de formules connues.

### Calculer un périmètre ou une aire

On effectue l'analyse préalable de la figure pour pouvoir se ramener à l'application de formules connues.

Exemple La figure ci-dessous représente une plaque de tôle.



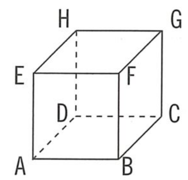

**Calculer le périmètre et l'aire de la plaque.**

Le périmètre est le même que celui d'un carré de côté 6 cm. Il est donc égal à $4 \times 6 = 24$ cm.
L'aire est celle de 5 carrés de côté 2 cm. Elle est donc égale à : $5 \times 2^2 = 20$ cm$^2$.

### Calculer un volume

On effectue l'analyse préalable de la figure pour pouvoir se ramener à l'application de formules connues.

Exemple La figure ci-dessous représente un cube dont l'arête mesure 3 cm.




**Quel est le volume de la pyramide de sommets ABDH ?**

L'aire de la base ABD est la moitié de celle du carré ABCD.

Elle est donc égale à $\frac{3^2}{2} = 4{,}5$ cm$^2$.

La hauteur est HD = 3 cm.

D'où le volume $V = \frac{1}{3} \times 4{,}5 \times 3 = 4{,}5$ cm$^3$.





### Calcul de périmètres et d'aires

Exercice **1.**

Deux cercles de même centre et de rayons respectifs 1 cm et 2 cm délimitent une couronne.

**> Déterminer l'aire de cette couronne.**

Exercice **2.**

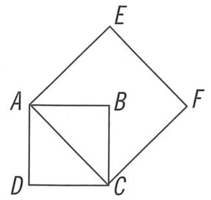
**> Si on augmente de 12 cm la longueur et de 12 cm la largeur d'un rectangle, son périmètre augmente de**

Ⓐ 12 cm Ⓒ 24 cm Ⓔ 36 cm
Ⓑ 18 cm Ⓓ 48 cm

Exercice **3.**

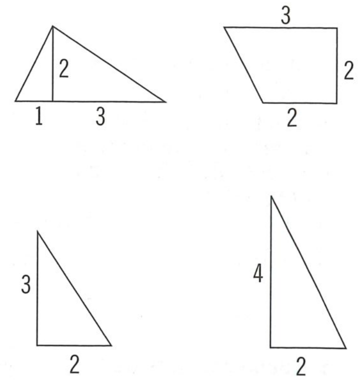
Le côté du carré *ABCD* mesure 3 cm.

**> Quelle est l'aire du carré *AEFC* ?**




Exercice **4.**

Avec les quatre pièces ci-dessous, on peut former un carré.

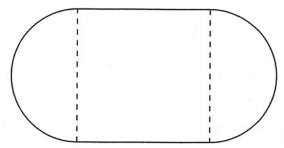



**> Calculer la longueur du côté de ce carré.**

Exercice **5.**

La figure ci-dessous est composée d'un carré de 10 cm de côté et de deux demi-disques.

**> Calculer l'aire et le périmètre de cette surface.**



## CORRIGÉS

Exercice **1.** On fait la différence des aires des deux cercles :
$A = \pi \times 2^2 - \pi \times 1^2 = 3\pi$ cm$^2 \approx 9{,}42$ cm$^2$.

Exercice **2.** Le nouveau périmètre est :
$2\,(l + 12 + L + 12) = 2\,(l + L) + 48$.
Le périmètre augmente de 48 cm, donc réponse Ⓓ.

Exercice **3.** L'aire $A$ du carré AEFC est 4 fois celle du triangle ABC, donc 2 fois celle du carré ABCD. D'où $A = 2 \times 3^2 = 18$ cm$^2$.

Exercice **4.**

Aire du premier triangle : $\frac{4 \times 2}{2} = 4$.

Aire du trapèze : $\frac{(3+2) \times 2}{2} = 5$.

Aire du deuxième triangle : $\frac{3 \times 2}{2} = 3$.

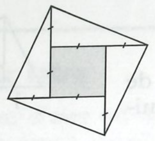
Aire du troisième triangle : $\frac{4 \times 2}{2} = 4$.

L'aire totale est 16, donc le côté du carré est 4.

Exercice **5.**
Périmètre : 2 côtés du carré $= 2 \times 10 = 20$ cm ;
longueur du cercle de rayon 5 cm =
$2 \times \pi \times 5 = 10\,\pi \approx 31{,}4$ cm ;
d'où le périmètre : $20 + 31{,}4 = 51{,}4$ cm.
Aire : aire du carré = 100 cm$^2$ ;
aire du disque $= \pi \times 5^2 = 25\,\pi$ cm$^2$.
Aire totale $= 100 + 25\,\pi \approx 178{,}5$ cm$^2$.

Exercice **6.**

Soit la figure répésentée ci-contre :

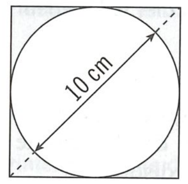


**> Combien de fois l'aire du grand quadrilatère contient-elle l'aire du carré grisé ?**

Ⓐ 4 fois Ⓒ 6 fois
Ⓑ 5 fois Ⓓ 7 fois

Exercice **7.**

**> Quelle est l'aire de la partie grisée de la figure ci-dessous ?**



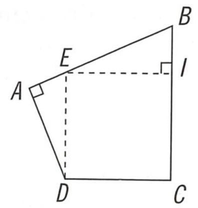

Ⓐ $-50\pi + 100$ Ⓒ $50(\pi - 2)$
Ⓑ $25(4 - \pi)$ Ⓓ $-25\pi + 100$

Exercice **8.**

Une parcelle de terrain a la forme représentée ci-dessous. Elle peut être décomposée en un carré *EICD* et deux triangles *BIE* et *DEA*.

On donne : $EI = 54$ m ; $BI = 36$ m ; $AE = 30$ m ; $AD = 40$ m.

**> Calculer l'aire totale du terrain.**




## Calcul de volumes

Exercice **9.**

Un vase de forme conique a 0,10 m de diamètre intérieur de base et 99 mm de hauteur.

**> Quelle est sa capacité ?**

Exercice **10.**

**> Combien de bouteilles de 2 litres peut-on remplir avec le contenu d'un container cubique d'arête 40 cm ?**

## CORRIGÉS

Exercice **6.** Si $l$ est la longueur du côté du carré, l'aire d'un triangle rectangle est : $\frac{l \times 2l}{2} = l^2$ = aire du carré. D'où la réponse Ⓑ.

Exercice **7.** L'aire du disque est $25\pi$. Celle du carré est 100.
Par différence : $100 - 25\pi = 25(4 - \pi)$.
D'où les réponses Ⓑ et Ⓓ.

Exercice **8.** **1.** Aire du carré $EICD = 54^2 = 2\,916^2$.

Aire du triangle $EIB = \frac{54 \times 36}{2} = 972$ cm$^2$.

Aire du triangle $AED = \frac{40 \times 30}{2} = 600$ m$^2$.

Aire totale : $2\,916 + 972 + 600 = 4\,488$ m$^2$.

Exercice **9.** Il faut exprimer les mesures dans la même unité : rayon = 5 cm ; hauteur = 9,9 cm.
Le volume est :

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 9{,}9 \approx 259$ cm$^3$.

Capacité : 259 cm$^3$ = 0,259 dm$^3$ = 0,259 L.

Exercice **10.** Volume du container :
$40^3 = 64\,000$ cm$^3$ = 64 dm$^3$ = 64 L.
On peut donc remplir 32 bouteilles.





Exercice **11.**

Un toit en terrasse rectangulaire mesure 35 m de long et 11 m de large. Il est recouvert d'une couche de neige de 35 cm d'épaisseur.

**a. Sachant que 1 dm$^3$ de neige pèse 120 g, calculer la masse de neige qui couvre le toit.**

**b. Calculer le nombre d'hectolitres d'eau qui sera récupérée par la fonte de neige (1 dL pèse 1 kg).**

**c. Le toit peut supporter au maximum 160 kg/m$^2$. Quelle est l'épaisseur maximale de neige qui peut recouvrir ce toit ?**

Exercice **12.**

Un bac à fleurs de forme cylindrique est construit en béton. Sa hauteur totale est de 120 cm. Son diamètre extérieur est de 140 cm. Les parois latérales et la base du bac ont une épaisseur de 20 cm.

**> Calculer le volume de béton nécessaire à la construction du bac en dm$^3$.**
(On prendra $\pi = 3{,}14$)

Exercice **13.**

Un cylindre de 10 cm de diamètre contient de l'eau dont la hauteur est 4 cm. On immerge entièrement une bille dans l'eau. La hauteur de l'eau dans le cylindre est alors de 5 cm.

**> Calculer le volume de la bille.**

Exercice **14.**

Un cube plein a une arête mesurant 4 cm. On le perce une première fois en découpant un parallélépipède rectangle selon la figure A. On le perce ensuite de la même manière selon la figure B sur laquelle le premier perçage n'est pas représenté.

**> Calculer le volume du solide ainsi obtenu.**

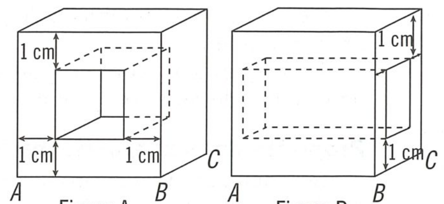



Figure A Figure B

## CORRIGÉS

Exercice **11.** **a.** Volume de la neige :
$35 \times 11 \times 0{,}35 = 134{,}75$ m$^3$ = 134 750 dm$^3$.
Masse de neige :
$134\,750 \times 120 = 16\,170\,000$ g = 16 170 kg.
**b.** 16 170 kg donne 16 170 dL = 16,17 hL.
**c.** Aire du toit : $35 \times 11 = 385$ m$^2$.
Masse maximale qu'il peut supporter :
$385 \times 160 = 61\,600$ kg.
Volume maximal de neige :
$\frac{61\,600\,000}{120} = 513\,333$ dm$^3$ = 513,333 m$^3$.
Épaisseur maximale de neige :
$513{,}333 \div 385 \approx 1{,}33$ m.

Exercice **12.** La base du bac est un cylindre de rayon 7 dm et de hauteur 2 dm. Son volume est : $V = \pi \times 7^2 \times 2 = 307{,}72$ dm$^3$. Le volume $V'$ de la paroi latérale est la différence des volumes de deux cylindres de hauteur 10 dm et de rayons respectifs : 7 dm et 5 dm.
D'où :
$V' = \pi \times 7^2 \times 10 - \pi \times 5^2 \times 10$
$= 10\pi \times (7^2 - 5^2) \approx 753{,}6$ dm$^3$.
Volume total : $307{,}72 + 753{,}6 = 1\,061{,}32$ dm$^3$.

Exercice **13.** Le volume de la bille est égal à celui d'un cylindre de diamètre 10 cm et de hauteur 1 cm :
$V = \pi \times 5^2 \times 1 = 25\pi$ cm$^3$ $\approx 78{,}54$ cm$^3$.

Exercice **14.**
Volume enlevé au premier perçage :
$2 \times 2 \times 4 = 16$ cm$^3$.
Volume enlevé au second perçage :
$2 \times (2 \times 2 \times 1) = 8$ cm$^3$.
Volume total du cube : $4^3 = 64$ cm$^3$.
il reste : $64 - (16 + 8) = 40$ cm$^3$.

# 28 PROPORTIONNALITÉ

**La proportionnalité est utilisée fréquemment dans la vie quotidienne : problèmes de prix, de vitesse, d'échelles, etc. La traditionnelle « règle de trois » n'est autre qu'une règle de calcul portant sur des grandeurs proportionnelles.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Suites et grandeurs proportionnelles

Deux suites de nombres ($x_1$, $x_2$, $x_3$, ...) et ($y_1$, $y_2$, $y_3$, ...) sont proportionnelles si on peut passer des termes de l'une aux termes de l'autre en multipliant par un même nombre non nul.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = a \quad \text{soit } y_1 = ax_1 \,;\, y_2 = ax_2 \,;\, y_3 = ax_3 \,;\, \ldots$$

× a

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... |
| $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... |

Ce tableau est un tableau de proportionnalité. Le nombre a est le coefficient de proportionnalité.

Deux grandeurs sont proportionnelles si les mesures de chacune d'elles forment deux suites de nombres proportionnelles.

### Propriété de la proportionnalité

Soit deux grandeurs proportionnelles : si les valeurs de l'une deviennent 2 fois, 3 fois plus grandes, les valeurs correspondantes de l'autre deviennent aussi 2 fois, 3 fois plus grandes.

On dit qu'elles varient dans les mêmes proportions.

Exemple La masse d'un objet en fer est proportionnelle à son volume. 5 cm$^3$ de fer pèsent 39 g.
Alors 10 cm$^3$ de fer pèsent 2 fois plus que 5 cm$^3$, soit 39 × 2 = 78 g.

× 2

| | | |
|---|---|---|
| Volume en cm$^3$ | 5 | 10 |
| Masse en g | 39 | 78 |

× 2

### Proportion (« règle de trois »)

On donne le tableau de proportionnalité suivant.
On cherche $x$ ; $x$ s'appelle la quatrième proportionnelle.

| | |
|---|---|
| 4 | 17 |
| 5 | $x$ ? |

On a l'égalité $\frac{4}{5} = \frac{17}{x}$. Une telle égalité est une proportion.

Dans une proportion, les produits en croix sont égaux : $4 \times x = 5 \times 17$.

D'où $\frac{5 \times 17}{4} = 21{,}25$.

### Applications

**Échelle.** On utilise une échelle quand on représente une situation réelle sur une carte, un plan, etc. Une échelle est indiquée par un rapport :

$$\text{Échelle} = \frac{\text{dimension sur la carte}}{\text{dimension réelle}}$$ (Les dimensions sont exprimées dans la même unité.)

**Débit.** Le débit d'un fluide est le volume de fluide fourni par une source quelconque pendant une unité de durée.

Un débit s'exprime généralement en mètre cube par seconde (m$^3$/s ou m$^3$.s$^{-1}$) ou litre par minute (L/min ou L.min$^{-1}$). Pour un débit moyen donné, le volume débité est proportionnel à la durée.





## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Les méthodes suivantes s'appliquent à de nombreux problèmes posés aux tests.

### Calculer et utiliser un coefficient de proportionnalité

Exemple **Un commerçant accorde une remise sur tous les prix de son magasin. Ainsi, le montant de la remise sur un prix de 140 € est de 5,6 €. Calculer :**
**– le coefficient multiplicateur qui permet de calculer la remise connaissant le prix avant remise ;**
**– la remise sur un prix de 250 € ;**
**– le prix d'un article dont la remise est de 14 €.**

Le prix avant réduction et la remise sont des grandeurs proportionnelles. On a le tableau de proportionnalité :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Prix avant remise en euros** | 140 | 250 | $y$ ? |
| **Remise en euros** | 5,6 | $x$ ? | 14 |

– Le coefficient multiplicateur cherché est $\frac{5{,}6}{140} = 0{,}04$. (Le pourcentage de remise est 4 %).
– $x = 250 \times 0{,}04 = 10$ € ; sur un prix de 250 € la remise est de 10 €.
– $y = 14 \div 0{,}04 = 350$ € ; la remise est de 14 € sur un prix de 350 €.

### Calculer une quatrième proportionnelle

Exemple **Calculer $x$ tel que $\frac{4{,}5}{x} = \frac{3}{0{,}1}$.**

En écrivant l'égalité des produits en croix, on obtient : $3 \times x = 4{,}5 \times 0{,}1$.

D'où : $x = \frac{4{,}5 \times 0{,}1}{3}$, ce qui donne $x = 0{,}15$.

**Calculer $t$ tel que $\frac{29}{145} = \frac{t}{85}$.**

En écrivant l'égalité des produits en croix, on obtient : $145 \times t = 29 \times 85$.

D'où : $t = \frac{29 \times 85}{145}$, ce qui donne $t = 17$.

### Résoudre un problème de proportionnalité

Exemple **Le prix de 52 litres d'essence est 56,16 €. Calculer le prix de 45 litres d'essence.**

Le prix et le nombre de litres d'essence sont des grandeurs proportionnelles.

| | | |
|---|---|---|
| **Nombre de litres** | 52 | 45 |
| **Prix en euros** | 56,16 | $x$ |

On a la proportion : $\frac{56{,}16}{52} = \frac{x}{45}$. D'où le produit en croix : $52 \times x = 56{,}16 \times 45$.

On obtient $x = \frac{56{,}16 \times 45}{52} = 48{,}60$ €.

On aurait pu également raisonner ainsi par étapes.
Le prix d'un litre d'essence est 52 fois plus petit que 56,16 €, donc égal à : $\frac{56{,}16}{52} = 1{,}08$.
Le prix de 45 litres est alors égal à : $1{,}08 \times 45 = 48{,}60$ €.

**Pour construire un mur, trois ouvriers mettent 15 heures. Combien de temps mettront cinq ouvriers pour construire deux murs identiques, en travaillant de la même manière ?**

On raisonne par étapes, en commençant par déterminer combien de temps met 1 ouvrier pour construire le mur : il met 3 fois plus de temps que 3 ouvriers, ce qui fait $3 \times 15 = 45$ h.
Pour construire 2 murs, il lui faut : $2 \times 45 = 90$ h.
Cinq ouvriers mettront 5 fois moins de temps : $90 \div 5 = 18$ h.

## Problèmes de proportionnalité

Exercice **1.**

**> Les suites de nombres suivantes sont-elles proportionnelles ?**
a. (14,8 ; 22,2 ; 35,15) et (4 ; 6 ; 9,5).
b. (7 ; 13 ; 17 ; 28) et (77 ; 130 ; 180 ; 309).

Exercice **2.**

Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse constante de 120 km/h.
**a. La distance parcourue *d* est-elle proportionnelle au temps *t* mis pour la parcourir ?**
**b. Quel est alors le coefficient de proportionnalité ?**

Exercice **3.**

**> Compléter le tableau de proportionnalité suivant :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | $y$ | 12 |
| 14,4 | 36 | 43,2 | $z$ |

Exercice **4.**

**> Calculer $x$ dans chacun des cas suivants :**

a. $\frac{x}{5} = \frac{7}{4}$ ; b. $\frac{2}{3} = \frac{x}{5}$ ;

c. $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$ ; d. $\frac{5}{8} = \frac{4}{x}$.

Exercice **5.**

Une voiture roule à vitesse constante. Elle a parcouru 84 km en 1 h 20 min.
**> Combien de temps faudra-t-il pour parcourir 147 km ?**

Exercice **6.**

Un article marqué 156 € est soldé 143,52 €.
**> Combien sera soldé un article marqué 254 € ? (les prix après solde sont proportionnels aux prix marqués) ?**

Exercice **7.**

Une voiture consomme 18,4 litres d'essence pour effectuer un trajet de 230 km.
**> Quelle sera sa consommation pour un trajet de 340 km ? Que faut-il admettre pour résoudre le problème ?**

## CORRIGÉS

Exercice **1.** **a.** Oui, car $\frac{14,8}{4} = \frac{22,2}{6} = \frac{33,15}{9,5}$.
**b.** non, car $\frac{77}{7} = 11$, mais $\frac{130}{13} = 10$.

Exercice **2.** **a.** La distance *d* est proportionnelle au temps, car d (km) $= t\,(\text{h}) \times 120$.
**b.** Le coefficient de proportionnalité est 120.

Exercice **3.** On détermine le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la 1re ligne à la seconde : $\frac{36}{5} = 7,2$. D'où : $x = \frac{14,4}{7,2} = 2$ ;
$y = \frac{43,2}{7,2} = 6$ ; $z = 12 \times 7,2 = 86,4$.

Exercice **4.** **a.** $4x = 35$ d'où $x = 35 \div 4 = 8,75$ ;
**b.** $3x = 10$ d'où $x = \frac{10}{3}$ ; **c.** $3x = 4$ d'où $x = \frac{4}{3}$ ;
**d.** $5x = 32$ d'où $x = 32 \div 5 = 6,4$.

Exercice **5.**
On a : 1 h 20 min = 60 min + 20 min = 80 min.
La vitesse étant constante, le temps est proportionnel à la distance.

| | | |
|---|---|---|
| Temps (min) | 80 | $x$ |
| Distance (km) | 84 | 147 |

On a $84 \times x = 80 \times 147$,
d'où $x = \frac{80 \times 147}{84} = 140$ min.
On convertit : 140 min = 2 × 60 min + 20 min = 2 h 20 min.

Exercice **6.**

| | | |
|---|---|---|
| Prix marqué (€) | 156 | 254 |
| Prix après solde (€) | 143,52 | $x$ |

On a $156 \times x = 254 \times 143,52$
d'où $x = \frac{254 \times 143,52}{156} = 233,68$ €.

Exercice **7.** On admet que la consommation est proportionnelle à la longueur du trajet :

| | | |
|---|---|---|
| Consommation (h) | 18,4 | $x$ |
| Trajet (km) | 230 | 340 |

On a : $230 \times x = 18,4 \times 340$,
d'où $x = \frac{18,4 \times 340}{230} = 27,2$ L.







Exercice **8.**

On a payé 17,85 € pour un trajet de 150 km.
**> Combien doit-on payer pour un trajet de 210 km ?**

Exercice **9**

Une agence offre le même voyage à 1 580 € en catégorie « tourisme » et 2 212 € en catégorie « luxe ».
**> Sachant qu'un autre voyage est offert à 5 040 € en catégorie « luxe », quel est son prix en catégorie « tourisme » ? (On suppose que les prix des deux catégories sont proportionnels.)**

Exercice **10.**

Un capital de 2 500 € a rapporté 143,75 €.
**> Combien rapportera un capital de 4 800 € placé dans les mêmes conditions ?**

Exercice **11.**

Un article vendu 82 € en 2000 est vendu 103,32 € en 2002. Un autre article ayant subi la même hausse était vendu 125 € en 2000.
**> Quel est son prix en 2002 ?**

Exercice **12.**

Vous avez payé 20,46 € pour effectuer un trajet de 220 km.

**a. Combien devez-vous payer pour effectuer un trajet de 560 km ?**

**b. Quelle distance pouvez-vous effectuer si vous payez 22,32 € ?**

**c. Quel est le prix du kilomètre parcouru ?**
(On admet que les prix sont proportionnels aux distances.)

## Problèmes d'échelle

Exercice **13.**

Sur une carte au 1/80 000, deux villes sont séparées de 16 cm.
**> Quelle est la distance réelle entre les deux villes en kilomètres ?**

## CORRIGÉS

Exercice **8.**

| | | |
|---|---|---|
| Prix (€) | 17,85 | $x$ |
| Trajet (km) | 150 | 210 |

On a $150 \times x = 17,85 \times 210$
d'où $x = \frac{17,85 \times 210}{150} = 24,99$ €.

Exercice **9.**

| | | |
|---|---|---|
| Prix tourisme (€) | 1 580 | $x$ |
| Prix luxe (€) | 2 212 | 5 040 |

On a $2\,212 \times x = 1\,580 \times 5\,040$
d'où $x = \frac{1\,580 \times 5\,040}{2\,212} = 3\,600$ €.

Exercice **10.**

| | | |
|---|---|---|
| Capital (€) | 2 500 | 4 800 |
| Rapport (€) | 143,75 | $x$ |

$2\,500 \times x = 143,75 \times 4\,800$
d'où $x = \frac{143,75 \times 4\,800}{2\,500} = 276$ €.

Exercice **11.**

| | | |
|---|---|---|
| Prix 2000 (€) | 82 | 125 |
| Prix 2002 (€) | 103,32 | $x$ |

$82 \times x = 103,32 \times 125$
d'où $x = \frac{103,32 \times 125}{82} = 157,5$ €.

Exercice **12.** **a.** On a le tableau :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Distance (km) | 220 | 560 | $y$ |
| Prix (€) | 20,46 | $x$ | 22,32 |

$220 \times x = 20,46 \times 560$ d'où $x = 52,08$ €
$20,46 \times y = 220 \times 22,32$ d'où $y = 240$ km.
**b.** Le coefficient de proportionnalité est $\frac{20,46}{220} = 0,093$.
**c.** Le prix du km parcouru est donc de 0,093 €.

Exercice **13.** 1 cm sur la carte représente 80 000 cm sur le terrain. Donc 16 cm représentent 16 × 80 000 = 1 280 000 cm = 12,8 km.

# 28 POURCENTAGES

**Les pourcentages sont utilisés fréquemment dans la vie quotidienne : remise commerciale, taux de TVA, statistiques, etc. et font l'objet de fréquentes questions aux concours.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Écritures d'un taux de pourcentage

Un taux de pourcentage $p$ % peut s'écrire sous la forme d'une fraction de dénominateur 100 : $\frac{p}{100}$ ou d'un nombre décimal obtenu en divisant p par 100.

Exemple 17 % = $\frac{17}{100}$ = 0,17 ; 2,4 % = $\frac{2,4}{100}$ = 0,024 ; 0,8 % = $\frac{0,8}{100}$ = 0,008 ; 123 % = $\frac{123}{100}$ = 1,23.

### Calcul d'un pourcentage d'une valeur

Pour calculer $p$ % d'une valeur, on multiplie cette valeur par $\frac{p}{100}$. On dit parfois que l'on applique le coefficient multiplicateur $\frac{p}{100}$.

Exemple Pour calculer 42 % de 315 €, on effectue : 315 × $\frac{42}{100}$ = 315 × 0,42 = 132,3 €.

### Pourcentages de variation (augmentation ou diminution)

Si une valeur augmente de $p$ %, on obtient la valeur après l'augmentation en multipliant la valeur initiale par le coefficient $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Si une valeur diminue de $p$ %, on obtient la valeur après la diminution en multipliant la valeur initiale par le coefficient $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Exemple En 1990, la commune de M. compte 3 450 habitants. En 2000, un recensement montre qu'elle a perdu 8 % de ses habitants depuis 1990. Le nombre d'habitants à M. en 2000 est : 3 450 × $\left(1-\frac{8}{100}\right)$ = 3 450 × (1 – 0,08) = 3 450 × 0,92 = 3 174.

### Applications

**TVA.** Un impôt est appliqué sur la consommation des biens et des services. Cet impôt est appelé la TVA (Taxe sur la valeur ajoutée). La TVA s'ajoute au prix de vente hors taxe, ce qui donne le prix de vente taxe comprise.

Prix de vente taxe comprise = prix de vente hors taxe + TVA.

Le taux de TVA est variable suivant les produits auxquels elle s'applique.

La TVA s'applique toujours au prix hors taxe.

Exemple Le prix de vente hors taxe d'un article est 870 €. Le taux de TVA est 5,5 %. Le montant de la TVA est : 870 × 0, 055 = 47,85 €. Le prix de vente taxe comprise est : 870 + 47,85 = 917,85 €.

**Intérêts.** Un capital est une somme d'argent placée dans un organisme financier (banques, caisse d'épargne, poste, ...).

L'intérêt est l'argent rapporté par le capital.

Le taux annuel d'intérêt est un pourcentage qui, appliqué au capital, donne l'intérêt au bout d'un an de placement, appelé intérêt annuel.

Exemple Une somme de 6 000 € est placée au taux annuel de 4 %. Le capital est 6 000 €. L'intérêt annuel est : 6 000 × 0,04 = 240 €.





## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Il est souvent intéressant, pour faciliter les calculs et les raisonnements, d'écrire le pourcentage sous forme décimale.

### Calculer le pourcentage d'une valeur

Exemple **Un commerçant accorde une remise de 4 % sur tous les prix de son magasin. Calculer le montant de la remise sur un prix de 250 €.**

On a 4 % = $\frac{4}{100}$ = 0,04. D'où : 250 × 0,04 = 10 € ; la remise est de 10 €.

### Calculer un taux de pourcentage

Pour calculer le taux de pourcentage d'une valeur $a$ par rapport à une valeur $b$ on divise $a$ par $b$.

Exemple **Un commerçant achète un lot de vêtements valant 3 780 €. Le grossiste lui accorde une remise de 113,4 €. Calculer le taux de la remise.**

On a : $\frac{113,4}{3\,780}$ = 0,03. Le taux de remise est 3 %.

### Calculer une valeur dont on connaît un pourcentage

Pour retrouver la valeur sur laquelle s'applique le taux de pourcentage p %, on divise le nombre donné par $\frac{p}{100}$.

Exemple **Un cinéma réalise 40 % de ses entrées pendant le week-end. Il y a eu 500 entrées pendant le week-end. Calculer le nombre d'entrées N sur toute la semaine.**

On a : 40 % = $\frac{40}{100}$ = 0,40.

N × 0,40 = 500. N s'obtient en divisant 500 par 0,40. D'où : N = 500 : 0,40 = 1 250.

### Traiter un problème d'augmentation ou de diminution de pourcentage

Exemple **Le nombre des immatriculations des voitures dans un département est de 11 450 au mois de mars. Il diminue de 6 % au mois d'avril. Calculer le nombre d'immatriculations au mois d'avril.**

Le coefficient multiplicateur est : 1 – 0,06 = 0,94.

Nombre d'immatriculations au mois d'avril : 11 450 × 0,94 = 10 763.

**Après une remise de 15 %, un article coûte 374 €. Calculer son prix avant la remise.**

Coefficient multiplicateur : 1 – 0,15 = 0,85. Prix avant la remise : 374 ÷ 0,85 = 440 €.

### Traiter un problème de TVA ou d'intérêts

Exemple **Le prix de vente hors taxe d'un produit est 1 068 €. Calculer le prix de vente taxe comprise si le taux de la TVA est 19,6 %.**

Augmenter un prix de 19,6 %, c'est le multiplier par 1 + 0,196 = 1,196.

Prix de vente taxe comprise : 1 068 × 1,196 = 1 277,33 €

**Un article est vendu taxe comprise 6 773,10 €. Le taux de TVA est 5,5 %. Quel est le prix de vente hors taxe (PVHT) ?**

6 773,10 € = PVHT × 1,055. D'où : PVHT = $\frac{6\,773,10}{1,055}$ = 6 420 €.

**Un capital de 1 000 € est placé au taux annuel de 8 %. Calculer la valeur acquise par ce capital au bout de 3 ans.**

Si le placement est à intérêts simples, les intérêts sont calculés chaque année sur le capital initial : valeur acquise = 1 000 + 3 × 80 = 1 240 €.

Si le placement est à intérêts composés, le capital est augmenté chaque année des intérêts. La valeur acquise est donnée par la formule : valeur acquise = capital initial × $(1 + t)^n$ où $t$ est le taux de placement et $n$ le nombre d'années. On obtient :

valeur acquise = 1 000 × $(1 + 0,08)^3$ = 1 259,71 €.

## Calculs avec des pourcentages

Exercice **1.**

**> Calculer :**

a. 13 % de 700 €

b. 42,5 % de 2 560 €

c. 0,5 % de 1 000 €

Exercice **2.**

L'eau contenue dans les champignons frais représente 80 % de leur masse.
**> Quelle est la masse d'eau contenue dans 340 g de champignons frais ?**

Exercice **3.**

Dans un parc ornithologique, on dénombre 154 rapaces ; ils représentent 22 % du nombre total d'oiseaux du parc.
**> Calculer le nombre d'oiseaux présents dans ce parc.**

Exercice **4.**

La remise sur un article en solde est de 7 % et s'élève à 15,40 €.
**> Calculer le prix de l'article avant remise.**

Exercice **5.**

Sur la route des vacances, Monsieur Tranquille a parcouru 130 km. Il estime qu'il a déjà fait 26 % du trajet.
**> Calculer la longueur totale à parcourir.**

Exercice **6.**

Dans une résidence de 80 appartements, 15 sont des studios.
**> Calculer le pourcentage de studios.**

Exercice **7.**

Un alliage cuivre-étain contient 30 kg de cuivre pour une masse totale d'alliage de 120 kg.

**1. Quel est le pourcentage de la masse de cuivre par rapport à la masse totale ?**

**2. Quel est le pourcentage de la masse de cuivre par rapport à la masse d'étain ?**

Exercice **8.**

Au départ d'un biathlon, 250 sportifs se sont présentés ; 110 ont terminé l'épreuve.
**> Calculer le pourcentage d'abandons.**

## CORRIGÉS

Exercice **1.** **a.** $700 \times 0{,}13 = 91$ €.
**b.** $2\,560 \times 0{,}425 = 1\,088$ €.
**c.** $1\,000 \times 0{,}005 = 5$ €.

Exercice **2.** $80\ \% = 0{,}80$
$340 \times 0{,}80 = 272$.
340 g de champignons frais contiennent 272 g d'eau.

Exercice **3.** Nombre total d'oiseaux $\times 0{,}22 = 154$ d'où :
Nombre total d'oiseaux $= 154 \div 0{,}22 = 700$.

Exercice **4.** Prix avant remise $\times 0{,}07 = 15{,}40$ €
d'où prix avant remise $= 15{,}40 \div 0{,}07 = 220$ €.

Exercice **5.** Longueur du trajet $\times 0{,}26 = 130$.
Longueur du trajet $= 130 \div 0{,}26 = 500$ km.

Exercice **6.** On divise le nombre de studios par le nombre d'appartements :
$15 \div 80 = 0{,}1875 = \frac{18{,}75}{100}$.
Le pourcentage est 18,75 %.

Exercice **7.**

**a.** Comme $30 \div 120 = 0{,}25 = \frac{25}{100}$, le pourcentage de cuivre dans l'alliage est 25 %.

**b.** La masse d'étain est $120 - 30 = 90$ kg.
Comme $30 \div 90 \approx 0{,}33$ le pourcentage de cuivre par rapport à l'étain est d'environ 33 %.

Exercice **8.**

Nombre d'abandons : $250 - 110 = 140$.
On divise le nombre d'abandons par le nombre total de sportifs : $140 \div 250 = 0{,}56 = \frac{56}{100}$. Le pourcentage d'abandon est : 56 %.





Exercice **9.**

Monsieur Alain paie un loyer mensuel de 480 €. Son propriétaire envisage une augmentation de 4 %.
**> Quel sera le nouveau loyer ?**

Exercice **10.**

Après une augmentation de 7 %, le prix d'un article est 37,45 €.
**> Calculer le prix avant augmentation.**

Exercice **11.**

Pendant l'année scolaire 2003-2004, un collège reçoit 816 élèves. Le principal constate qu'il a 4 % d'élèves en moins par rapport à l'année scolaire précédente.
**> Quel était le nombre d'élèves dans ce collège en 2002-2003 ?**

Exercice **12.**

Sur une fin de série, un téléviseur est proposé au prix de 390 € au lieu de 420 €.
**> Calculer le pourcentage de réduction.**

Exercice **13.**

La population de la France est passée de 52 millions d'habitants en 1975 à 60 millions en 1999.
**> Calculer le pourcentage d'accroissement de la population entre ces deux dates.**

## Calcul de TVA et d'intérêts

Exercice **14.**

**> Calculer la TVA sur un article dont le prix de vente hors taxe est 50,68 € (taux : 19,6 %).**

Exercice **15.**

**> Calculer l'intérêt produit par un capital de 4 500 € placé pendant un an au taux de 6 %.**

Exercice **16.**

Un capital de 400 € est placé, à intérêts composés, pendant 3 ans, au taux annuel de 5 %.
**> Calculer la valeur acquise et le montant des intérêts.**

## CORRIGÉS

Exercice **9.** Augmenter de 4 % revient à multiplier par $1 + 0{,}04 = 1{,}04$.
Nouveau loyer : $480 \times 1{,}04 = 499{,}20$ €.

Exercice **10.** Augmenter de 7 % revient à multiplier par $1 + 0{,}07 = 1{,}07$.
Prix avant augmentation $\times 1{,}07 = 37{,}45$ €.
Prix avant augmentation : $37{,}45 \div 1{,}07 = 35$ €.

Exercice **11.** Diminuer de 4 % revient à multiplier par $1 - 0{,}04 = 0{,}96$.
Nombre d'élèves en 2002-2003 $\times 0{,}96 = 816$.
Nombre d'élèves en 2002-2003 $= 816 \div 0{,}96 = 850$.

Exercice **12.** Réduction : $420 - 390 = 30$ €.
Comme $30 \div 420 \approx 0{,}0714 = \frac{7{,}14}{100}$, le pourcentage de remise est d'environ 7,1 %.

Exercice **13.** Accroissement de la population : 8 millions.
Comme $\frac{8}{52} \approx 0{,}1538 \approx \frac{15{,}38}{100}$, le pourcentage d'accroissement est environ 15,4 %.

Exercice **14.** $50{,}68 \times 0{,}196 \approx 9{,}93$ €.

Exercice **15.** $4\,500 \times 0{,}06 = 270$ €.

Exercice **16.** La valeur acquise est :
$400 \times (1 + 0{,}05)^3 = 400 \times 1{,}05^3 \approx 463$ €.
L'intérêt est : $463 - 400 = 63$ €.

# 30 UNITÉS DE DURÉE - VITESSE

**Le TGV met deux heures pour aller de Lyon à Paris. La durée du trajet (on dit parfois le « temps du trajet ») s'exprime à l'aide d'une unité : l'heure. Cette durée est courte parce que le train roule à une vitesse élevée. Nous allons revoir les notions d'unité de durée et de vitesse.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Les unités de durée

Le jour est partagé en 24 heures : $1\text{ j} = 24\text{ h}$ ; donc $1\text{ h} = \frac{1}{24}$ de jour.

L'heure est partagée en 60 minutes : $1\text{ h} = 60\text{ min}$ ; donc $1\text{ min} = \frac{1}{60}$ d'heure.

La minute est partagée en 60 secondes : $1\text{ min} = 60\text{ s}$ ; donc $1\text{ s} = \frac{1}{60}$ de minute.

### Opérations avec les unités de durée

On ne peut ajouter, soustraire, multiplier ou diviser que des durées exprimées dans la même unité : des heures avec des heures, des secondes avec des secondes, …

Exemple 3 h 14 min + 21 min 12 s = 3 h 35 min 12 s
3 h 24 min – 1 h 18 min = 2 h 6 min
2 h 9 min × 2 = 4 h 18 min
3 h 27 min ÷ 3 = 1 h 9 min

### Écriture sexagésimale et écriture décimale d'une durée

Dans l'écriture sexagésimale (c'est-à-dire à base soixante) d'une durée, le nombre d'heures et le nombre de minutes sont des nombres entiers : 1 h 30 min est l'écriture sexagésimale d'une durée.

Dans l'écriture décimale d'une durée, le nombre d'heures ou le nombre de minutes peuvent être des nombres décimaux non entiers : 1,5 h est l'écriture décimale de 1 h 30 min.

La seconde est parfois fractionnée en dixièmes, centièmes…

Exemple On dit qu'un coureur a réalisé un temps de 10 s 73 centièmes au 100 m.

### Vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un mobile entre deux points s'exprime par la distance parcourue pendant une unité de temps.

Exemple On dit qu'une voiture a roulé à la vitesse moyenne de 75 km par heure entre deux villes.

Pour exprimer une vitesse, les unités les plus courantes sont le kilomètre par heure (km/h ou $\text{km.h}^{-1}$) et le mètre par seconde (m/s ou $\text{m.s}^{-1}$). Pour des déplacements particulièrement lents ou rapides, on utilise d'autres unités, comme le mètre par heure (m/h) ou le kilomètres par seconde (km/s).

Exemple La lumière parcourt 300 000 kilomètres en une seconde. Sa vitesse est 300 000 km/s ou 300 000 $\text{km.s}^{-1}$.

Si $d$ est la distance parcourue pendant une durée $t$ par un mobile dont la vitesse moyenne est $v$, alors on a la relation :

$$v = \frac{d}{t}, \quad \text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{durée}}.$$

Si $d$ est en km et $t$ en heures, alors $v$ est en km/h.

Exemple Sur terrain plat, un cycliste parcourt 52 km en 2 heures. Sa vitesse moyenne est : $v = \frac{52}{2} = 26$ km/h.





## 2. Ce qu'il faut savoir faire

La conversion des unités doit être maîtrisée pour pouvoir effectuer les calculs dans les problèmes de vitesse.

### Convertir une unité de durée

Exemple **Convertir 2 h 18 min 27 s en secondes.**
On sait que 1 h = 60 min et 1 min = 60 s. D'autre part : 2 h 18 min 27 s = 2 h + 18 min + 27 s.
2 h 18 min 27 s = 2 × 60 ÷ 60 + 18 × 60 + 27 = 7 200 + 1 080 + 27 = 8 307 s.

### Calculer avec des unités de durée

Exemple **Calculer 7 h 25 min 32 s – 3 h 38 min 49 s.**

| | |
|---|---|
| 6 h 84 min 92 s | |
| ~~7~~ h ~~25~~ min ~~32~~ s | |
| – 3 h 38 min 49 s | |
| 3 h 46 min 43 s | |

On ne peut pas enlever 49 s à 32 s, ni 38 min à 25 min. On transforme la durée de la 1re ligne pour que les soustractions deviennent possibles ; on peut écrire 7 h 25 min 32 s = 7 h 24 min 92 s = 6 h 84 min 92 s.

### Passer de l'écriture sexagésimale à l'écriture décimale et inversement

Exemple **Donner l'écriture décimale de 5 h 12 min.**
On convertit les minutes en fraction d'heure, que l'on écrit sous forme décimale.
$12\text{ min} = 12 \times \frac{1}{60}\text{ h} = \frac{12}{60}\text{ h} = 0{,}2\text{ h}$. D'où 5 h 12 min = 5 h + 0,2 h = 5,2 h.
**Écrire 1,8 h en h et min.**
On a : 1,8 h = 1 h + 0,8 h. Comme 60 × 0,8 = 48, on a 0,8 h = 48 min.
D'où 1,8 h = 1 h 48 min.

### Convertir une unité de vitesse

Exemple **Convertir 45 km/h en m/min.**
On transforme les km en m et les heures en minutes, puis on effectue la division.
45 km = 45 000 m ; 1 h = 60 min.
$45\text{ km/h} = \frac{45\,000\text{ m}}{60\text{ min}} = 750\text{ m/min}.$
**Convertir 4,9 cm/s en m/min.**
En 1 s, le mobile parcourt 4,9 cm. En 1 min, donc en 60 s, il parcourt une distance 60 fois plus grande.
4,9 × 60 = 294 cm = 2,94 m. La vitesse est donc de 2,94 m par min : v = 2,94 m/min.

### Utiliser la relation entre vitesse, distance et durée

La relation $v = \frac{d}{t}$ se transforme en $d = v \times t$ ou $t = \frac{d}{v}$.

Exemple **Un cycliste se déplace à la vitesse moyenne de 24 km/h. Calculer la distance parcourue en 15 minutes.**
Il faut faire attention à la cohérence des unités. On a : v = 24 km/h, $t = 15\text{ min} = \frac{1}{4}\text{ h}$.
La distance parcourue en 15 minutes est $d = v \times t = 24 \times \frac{1}{4} = 6$ km.
**Un automobiliste roule à la vitesse moyenne de 90 km/h. Il doit parcourir 153 kilomètres. Quelle est la durée de son trajet en heures et minutes ?**
$t = \frac{d}{v} = \frac{153}{90} = 1{,}7\text{ h}$. D'où t = 1 h + (0,7 × 60) min = 1 h + 42 min.
La durée du trajet est 1 h 42 min.

## Conversion d'unités de durée

Exercice **1.**

**> Convertir 3 h 27 min en minutes, puis en secondes.**

Exercice **2.**

**> Convertir 6 497 s en heures, minutes et secondes.**

## Opérations avec les unités de durée

Exercice **3.**

**> Calculer**

**a.** 2 h 42 min 25 s + 6 h 30 s + 53 min 18 s.

**b.** Calculer 6 h 20 min 21 s – 2 h 40 min 45 s.

**c.** Calculer 1 h 35 min 43 s × 2.

## Écriture décimale et sexagésimale

Exercice **4.**

**> Donner l'écriture décimale de 4 h 21 min.**

Exercice **5.**

**> Exprimer 5,3 h en heures et minutes.**

## Problèmes sur les durées

Exercice **6.**

**> Écrire en fraction irréductible d'heure : 54 minutes ; 20 minutes.**

## CORRIGÉS

Exercice **1.** On sait que dans 1 h il y a 60 min.
D'où : 3 h 27 min = (3 × 60) min + 27 min
= 180 min + 27 min = 207 min
On sait que dans 1 min il y a 60 s. D'où :
207 min = (207 × 60) s = 12 420 s.

Exercice **2.** On cherche d'abord combien il y a de minutes dans 6 497 s :
6 497 ÷ 60 = 108 reste 17.
Donc 6 497 s = 108 min 17 s.
On cherche ensuite combien il y a d'heures dans 108 min : 108 ÷ 60 = 1 reste 48.
Donc 108 min = 1 h 48 min.
Au total : 6 497 s = 1 h 48 min 17 s.

Exercice **3.** **a.** On pose l'addition :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 h | 42 min | 25 s |
| + | 6 h | | 30 s |
| + | | 53 min | 18 s |
| | 8 h | 95 min | 73 s |

On a 73 s = 60s + 13 s = 1 min 13 s.
D'où 8 h 95 min 73s = 8h 96 min 13s.
De même :
96 min = 60 min + 36 min = 1 h 36 min.
d'où 8 h 95 min 73s = 9 h 36 min 13 s.
Le résultat de l'addition est 9 h 36 min 13 s.

**b.** Pour pouvoir effectuer la soustraction, on transforme 6 h 20 min 21 s de manière à avoir un nombre de secondes supérieur à 45 et un nombre de minutes supérieur à 40 :
6 h 20 min 21 s = 6 h 19 min 81 s = 5 h 79 min 81 s.

On pose la soustraction :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 h | 79 min | 81 s |
| – | 2 h | 40 min | 45 s |
| | 3 h | 39 min | 36 s |

Le résultat de la soustraction est 3 h 39 min 36 s.

**c.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 h | 35 min | 43 s |
| × | 2 | | |
| | 2 h | 70 min | 86 s |

On a 86 s = 60 s + 26 s = 1 min 26s d'où
2 h 70 min 86 s = 2 h 71 min 26 s.
De même 71 min = 60 min + 11 min = 1 h 11 min.
Donc 2 h 70 min 86 s = 3 h 11 min 26 s.
Le résultat de la multiplication est 3 h 1 min 26 s.

Exercice **4.** On a 1 min = $\frac{1}{60}$ h. D'où :
21 min = 21 × $\frac{1}{60}$ = h = 0,35 h.
Donc 4 h 21 min = 4 h + 0,35 h = 4,35 h.

Exercice **5.** 5,3 h = 5 h + 0,3 h.
0,3 × 60 = 18 ; donc 0,3 h = 18 min.
D'où 5,3 h = 5 h 18 min.

Exercice **6.** On a 1 min = $\frac{1}{60}$ h. D'où :
54 min = 54 × $\frac{1}{60}$ = $\frac{54}{60}$ h.
Comme $\frac{54}{60} = \frac{6 \times 9}{6 \times 10}$, on peut simplifier par 6.
On a donc : $\frac{54}{60}$ h = $\frac{9}{10}$ h et 54 min = $\frac{9}{10}$ h.
De même, 20 min = 20 × $\frac{1}{60}$ = $\frac{20}{60}$ h = $\frac{1}{3}$ h.





## Conversion d'unités de vitesse

Exercice **7.**

**> Convertir**
**a.** 90 km/h en m/s.
**b.** 4,5 m/min en km/h.

Exercice **8.**

**> Que représente en fraction :**
**a.** 3/4 h pour une journée ?
**b.** 40 secondes pour l'heure ?
**c.** 8 min pour une journée ?

## Problèmes de vitesse

Exercice **9.**

Une limace avance à la vitesse constante de 3 m/h.
**a. Quelle distance, en cm, a-t-elle parcourue en 5 minutes ?**
**b. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 50 cm ?**

Exercice **10.**

Un automobiliste se déplace à la vitesse moyenne de 78 km/h. Il roule de 9 h 15 à 11 h 30.
**> Quelle distance a-t-il parcourue ?**

Exercice **11.**

Un train part d'une ville à 8 h 10 min et arrive à une autre ville à 11 h 40 min.
**> Sachant que la distance entre les deux villes est 434 km, calculer la vitesse moyenne de ce train en km/h.**

Exercice **12.**

**> Donner le nom du cycliste qui a parcouru la plus grande distance. Justifier la réponse.**
Ⓐ a roulé 20 minutes à 30 km/h.
Ⓑ a roulé 30 minutes à 25 km/h.
Ⓒ a roulé 45 minutes à 15 km/h.

## CORRIGÉS

Exercice **7.** **a.** Comme on cherche la vitesse en m/s, on va transformer les km en m et les heures en secondes :
90 km = 90 × 1 000 = 90 000 m ;
1 h = 60 min = 60 × 60 = 3 600 s.
Donc : 90 km/h = $\frac{90\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}$ = 25 m/s.

**b.** Comme on cherche la vitesse en km/h, on va transformer les m en km.
1 m = $\frac{1}{1\,000}$ km, donc
4,5 m = 4,5 × $\frac{1}{1\,000}$ = $\frac{4,5}{1\,000}$ = 0,004 5 km.
La vitesse est donc de 0,004 5 km par minute.
Dans 1 h il y a 60 min, donc, en km/h, la vitesse sera de 0,004 5 × 60 = 0,27 km/h.

Exercice **8.** **a.** Il faut chercher combien il y a de quarts d'heure dans une journée. Dans un jour, il y a 24 h et dans une heure, il y a 4 quarts d'heure. Donc dans un jour, il y a 4 × 24 = 96 quarts d'heure. D'où $\frac{1}{4}$ h = $\frac{1}{96}$ j.

**b.** Il faut chercher combien il y a de secondes dans une heure. Dans 1 heure, il y a 60 min et dans 1 min il y a 60 s. Donc 1 h = 60 × 60 s = 3 600 s.
D'où 20 s = $\frac{20}{3\,600}$ h = $\frac{1}{180}$ h

**c.** Dans une journée, il y a 24 h et 1h = 60 min.
Donc : 1 j = 24 × 60 = 1 440 min.
D'où 40 min = $\frac{40}{1\,440}$ j = $\frac{1}{36}$ j.

Exercice **9.**
**a.** La limace parcourt 1,5 m en 60 min. En 5 min, c'est-à-dire 12 fois moins, elle parcourt :
1,5 ÷ 12 = 0,125 m = 12,5 cm.
**b.** La limace parcourt 1,5 m en 60 min, donc 50 cm en 20 min.

Exercice **10.** Durée du parcours :
11 h 30 – 9 h 15 min = 2 h 15 min = 2,25 h ;
d = 78 × 2,25 = 175,5 km.

Exercice **11.** Durée du parcours :
11 h 40 min – 8 h 10 min = 3 h 30 min = 3,5 h.
Vitesse moyenne : $\frac{434}{3,5}$ = 124 km/h.

Exercice **12.**
Distance parcourue par A : 30 × $\frac{20}{60}$ = 10 km.
Distance parcourue par B : 25 × $\frac{30}{60}$ = 12,5 km.
Distance parcourue par C : 15 × $\frac{45}{60}$ = 11,25 km.
C'est le cycliste Ⓑ qui a parcouru la plus grande distance.

# 31 DÉNOMBREMENT - PROBABILITÉ

**Le dénombrement consiste à déterminer combien de cas différents on peut rencontrer dans une situation donnée. Une probabilité est un nombre qui mesure le caractère aléatoire d'un événement.**

## 1. Ce qu'il faut savoir

### Dénombrement

Dans les exercices posés, il s'agit essentiellement de déterminer le nombre de groupements différents que l'on peut faire avec $n$ objets. Il faut bien regarder dans lequel des cas suivants on se trouve :

**Cas 1 : on ne peut pas prendre deux fois le même objet.**

Exemple Quels sont les ordres d'arrivée possible pour trois coureurs A, B, C (il n'y a pas d'ex-æquo) ? On peut avoir : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, donc 6 permutations. On aurait pu raisonner ainsi : il y a 3 possibilités pour la première place, puis 2 pour la deuxième, puis 1 pour la troisième. Cela fait au total : $3 \times 2 \times 1 = 6$. Le nombre $3 \times 2 \times 1$ se note 3 ! et se nomme « factorielle 3 ».

Plus généralement, le nombre de permutations de $n$ objets est :
$n ! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

**Cas 2 : on peut prendre plusieurs fois le même objet.**

Exemple Quels sont tous les nombres de trois chiffres que l'on peut écrire avec les chiffres 1, 2, 3 ? Il y a trois possibilités pour la première position, trois pour la deuxième et trois pour la troisième, donc au total : $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$.

### Probabilité

On lance un dé équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir le 4 ? Le lancement du dé peut aboutir à l'apparition de l'un des 6 chiffres : il y a 6 cas possibles. L'apparition du 4 se réalise dans un seul des 6 cas possibles : il y a 1 cas favorable. On dit que la probabilité d'obtenir le chiffre 4 est : $\frac{1}{6}$.

D'une manière générale, si on considère une épreuve comportant $N$ cas possibles (également probables), et si $n$ d'entre eux réalisent un événement, on a :

Probabilité de l'événement $= \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{n}{N}$. La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.

**Événement contraire.** Dans l'exemple du lancer de dé, la probabilité de ne pas obtenir le chiffre 4 est : $\frac{5}{6}$. On remarque que : $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$. L'événement « ne pas obtenir le chiffre 4 » est l'événement contraire de l'événement « obtenir le chiffre 4 » : si un des événements est réalisé, l'autre ne l'est pas.

Si p est la probabilité d'un événement, la probabilité de l'événement contraire est : $1 - p$.

**Événements incompatibles.** Dans l'exemple du lancer de dé, la probabilité d'obtenir le chiffre 4 est : $\frac{1}{6}$. De même, la probabilité d'obtenir le chiffre 1 est : $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir le chiffre 1 ou le chiffre 4 est : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. On remarque que : $\frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Les deux événements « obtenir le chiffre 1 » et « obtenir le chiffre 4 » ne peuvent se produire simultanément : on dit qu'ils sont incompatibles.

Lorsque deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités.





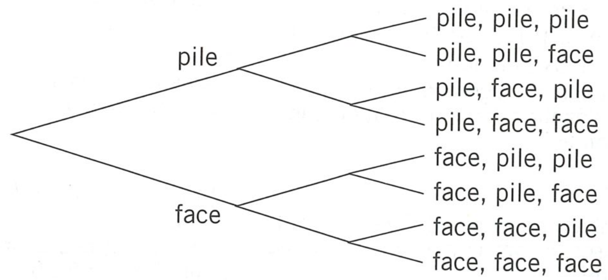
## 2. Ce qu'il faut savoir faire

Les problèmes posés présentent des situations très simples, qui ne font pas appel aux formules mathématiques compliquées, mais plus au bon sens. Il est souvent utile de traduire la situation par un schéma.

### Traiter un problème de dénombrement

Exemple **Une émission de télévision doit comporter 5 séquences différentes. Quel est le nombre d'ordres de présentation de ces séquences ?**
On est dans le cas du nombre de permutations de 5 objets. Le nombre d'ordres de présentation est donc : $5 ! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

**On lance successivement trois fois une pièce de monnaie. Quels sont tous les cas possibles ?**
On peut utiliser un « arbre » pour schématiser la situation :




On met ainsi en évidence les 8 cas possibles.

### Calculer une probabilité dans un cas simple

Exemple **On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que :**
**a. cette carte soit un as ? b. cette carte soit rouge ?**
Quand on tire une carte au hasard, il y a 32 cas possibles.
**a.** il y a 4 as dans le jeu, donc l'événement « tirer un as » comporte 4 cas favorables.
La probabilité que la carte tirée soit un as est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
**b.** il y a 16 cartes rouges dans le jeu, donc l'événement « tirer une carte rouge » comporte 16 cas favorables.
La probabilité que la carte tirée soit rouge est $\frac{16}{32} = 0,5$.

**L'étude du comportement d'un matériel montre que la probabilité d'avoir une panne pendant les 5 premiers mois de fonctionnement est 0,83. Quelle est la probabilité pour qu'une panne n'intervienne qu'après 5 mois de fonctionnement ?**
La probabilité de l'événement « avoir une panne pendant les 5 premiers mois » est 0,83.
La probabilité cherchée est celle de l'événement contraire. Elle est donc égale à :
$1 - 0,83 = 0,17$.

**Un sac contient des boules de couleurs différentes. On sait que la probabilité de tirer une boule rouge est : 0,15 et celle de tirer une boule bleue est : 0,20. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit rouge ou bleu ?**
L'événement « tirer une boule rouge » a une probabilité égale à 0,15.
L'événement « tirer une boule bleue » a une probabilité égale à 0,20.
Ces deux évènements sont incompatibles.
Donc la probabilité de l'événement « tirer une boule rouge ou bleue» est égale à :
$0,15 + 0,20 = 0,35$.

## Dénombrement

Exercice **1.**

Un représentant désire visiter 4 clients dans la journée.
**> De combien de manières différentes peut-il organiser sa tournée ?**

Exercice **2.**

Un groupe de 8 personnes doit désigner un bureau composé de 3 membres : le président, le secrétaire, le trésorier.
**> Quel est le nombre de bureaux possibles ?**

Exercice **3.**

Un groupe est composé de 5 hommes et 3 femmes. Il faut désigner une délégation de deux personnes.
**> De combien de façons peut-on composer une délégation comportant un homme et une femme ?**

Exercice **4.**

**> De combien de façons différentes peut-on disposer 5 personnes autour d'une table ronde ?**

Exercice **5.**

Six candidats se présentent à une sélection où seuls trois seront retenus et classés $1^{er}$, $2^{e}$, $3^{e}$.
**> Combien y a-t-il de résultats possibles ?**

## Probabilité

Exercice **6.**

Dans un lot de 50 pièces figurent 7 pièces défectueuses. On prélève au hasard une pièce.
**> Quelle est la probabilité pour que cette pièce soit bonne ?**

Exercice **7.**

Une tombola comporte 50 billets, dont 2 gagnants. Une personne achète un billet.
**> Quelle est la probabilité pour que ce billet soit gagnant ?**

Exercice **8.**

On jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
**> Quelle est la probabilité d'obtenir :**
**a. un 5 ou un 6 ; b. ni un 5 ni un 6.**

## CORRIGÉS

Exercice **1.** Le nombre de circuits possibles est le nombre de permutations qu'il peut faire avec les 4 clients, donc : $4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Exercice **2.** Il y a 8 façons de choisir le président, puis celui-ci étant choisi, 7 fois pour le secrétaire et enfin 6 pour le trésorier.
Au total $8 \times 7 \times 6 = 336$.

Exercice **3.** Il y a 5 choix pour l'homme et 3 pour la femme, donc au total $5 \times 3 = 15$ délégations possibles.

Exercice **4.** C'est le nombre de permutations que l'on peut faire avec 5 personnes :
$5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Exercice **5.** Il y a 6 possibilités pour la première place, puis 5 pour la deuxième et 4 pour la troisième, donc au total : $6 \times 5 \times 4 = 120$ résultats possibles.

Exercice **6.** Sur les 50 pièces, il y a $50 - 7 = 43$ bonnes. Si on prélève une pièce, il y a 50 cas possibles, et 43 cas favorables. La probabilité pour que la pièce soit bonne est donc : $\frac{43}{50} = 0{,}86$.

Exercice **7.** Nombre de cas possibles : 50 ; nombre de cas favorables : 2.

La probabilité est donc : $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$.

Exercice **8.** Nombre de cas possibles : 6 ;

**a.** nombre de cas favorables : 2. La probabilité d'obtenir un 5 ou un 6 est donc $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

**b.** la probabilité d'obtenir « ni un 5 ni un 6 » est la probabilité de l'événement contraire du précédent.
Elle est donc égale à : $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.





Exercice **9.**

**> Calculer la probabilité d'obtenir au moins une face en jetant deux pièces de monnaie.**

Exercice **10.**

Sur un groupe de 10 personnes, auquel appartient M. Durand, il faut en désigner 2 qui se rendront, l'une dans une ville A, l'autre dans une ville B. On effectue un tirage au sort.
**> Quelle est la probabilité pour M. Durand d'effectuer un déplacement ?**

Exercice **11.**

On jette un dé équilibré.
**> Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?**

Exercice **12.**

On jette deux dés équilibrés.
**> Quelle est la probabilité d'obtenir :**
**a. Un total égal à 7 ?**
**b. Un total strictement supérieur à 8 ?**
**c. Un total au moins égal à 6 ?**

## CORRIGÉS

Exercice **9.** Il y a 4 cas possibles : (pile, pile) ; (pile, face) ; (face, pile) ; (face, face).
Il y a 3 cas favorables : (pile, face) ; (face, pile) ; (face, face).
La probabilité cherchée est donc : $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Exercice **10.** La probabilité de l'événement « aller dans la ville A » est $\frac{1}{10}$.
La probabilité de l'événement « aller dans la ville B » est $\frac{1}{10}$.
Ces deux événements sont incompatibles. La probabilité d'aller dans la ville A ou dans la ville B est :
$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}20$.

Exercice **11.** Nombre de cas possibles : 6.
Nombre de cas favorables : 3 (le 2, le 4 ou le 6).
La probabilité est donc : $\frac{3}{6} = 0{,}5$.

Exercice **12.** On peut faire un tableau pour obtenir le nombre de cas possibles, en mettant dans les cases le total des deux dés :

| $2^e$ dé \ $1^{er}$ dé | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Il y a 36 cas possibles.

**a.** Il y a 6 cases dont le total est 7, donc 6 cas favorables. La probabilité d'un total de 7 est : $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

**b.** Il y a 10 cases dont le total est strictement supérieur à 8, donc la probabilité cherchée est : $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

**c.** Il y a 26 cas dont le total est au moins égal à 6, donc la probabilité cherchée est : $\frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

# 32 SUITES NUMÉRIQUES

**Les tests de suites numériques font surtout appel au raisonnement logique plus qu'à des connaissances mathématiques.**
**Les suites numériques se composent de séries de nombres à partir desquelles il faut déterminer un ou plusieurs chiffres manquants. Il s'agit toujours d'appliquer une logique de progression basée sur des opérations relativement simples.**

## 1. Description des tests

### Les suites arithmétiques

Beaucoup de suites sont arithmétiques c'est-à-dire que chaque terme est la somme du précédent et d'un nombre constant appelé raison.

Exemple 1 6 11 16 ?

La réponse est 21. Chaque nombre s'obtient en ajoutant 5 au précédent.

La progression peut être croissante ou décroissante.

Exemple 38 29 20 11 •

La réponse est 2. On retranche 9 à chaque fois.

Plusieurs suites arithmétiques (croissantes ou décroissantes) peuvent être combinées.

Exemple 2 7 6 6 10 5 14 ? ?

La réponse est 4 18. La première suite augmente de 4 (2 6 10 14 18). La deuxième suite diminue de 1 (7 6 5 4).

### Les suites reposant sur la progression

La deuxième grande catégorie de suites est construite sur le principe de progression géométrique.

Chaque terme est égal au précédent multiplié ou divisé par un nombre constant appelé raison.

Exemple 1 3 9 27 ?

La réponse est 81. Chaque nombre est multiplié par 3.

3 125 625 125 25 ?

La réponse est 5. Chaque nombre est divisé par 5.

### Les suites combinées

Comme pour les suites arithmétiques, les suites géométriques peuvent être combinées.

Exemple 1 32 3 16 9 8 27 ?

La réponse est 4 81. Chaque nombre de la première suite est multiplié par 3 (1 3 9 27 81).

Chaque nombre de la deuxième suite est divisé par 2 (32 16 8 4).

D'autres formes de progressions sont utilisées telles que : $\times 1$ ; $\times 2$ ; $\times 3$... ou $+ 1$ ; $+ 2$ ; $+ 3$... ou encore $1^2$ ; $2^2$ ; $3^2$...

Exemple 4 4 8 24 ?

La réponse est 96. ($4 \times 1 \rightarrow 4$ ; $4 \times 2 \rightarrow 8$...)

### Les suites sous forme de figures

Les suites sont parfois disposées sous forme de figures. Les mêmes règles de progression sont à appliquer mais avec une lecture qui peut être horizontale, verticale, diagonale ou symétrique.



Exemple 2
5
8
11
14
17
?

La réponse est 20. On ajoute 3 en suivant les diagonales de gauche à droite puis de droite à gauche.

13 11
12
11 ?

La réponse est 13, nombre obtenu par symétrie.

### Les suites hypothético-déductives

Des suites faisant appel au raisonnement hypothético-déductif (inspirées du jeu de Mastermind©) sont couramment proposées.

À partir d'une base de données, des propositions (hypothèses) sont faites.

Ce sont ces propositions qui vont vous permettre de trouver par déduction la solution recherchée.

Exemple À partir d'un ensemble de 6 nombres :

3 2 7 11 20 12 trouvez la suite ? ? sachant que :

3 2 a un élément commun bien placé avec la suite à trouver ;

3 18 a un élément commun mal placé avec la suite à trouver.

Des deux propositions, il faut éliminer d'emblée le 3 puisqu'il ne peut être à la fois bien placé (1re proposition) et mal placé (2e proposition) ; 2 est donc l'élément bien placé et 18 l'élément mal placé ; la suite à trouver est donc 18 – 2.

### Jeux et astuces

Une variante est apportée par des exercices plus ludiques s'apparentant plus à des jeux tels les carrés magiques par exemple.

Exemple

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 3 | 2 |
| 6 | 144 | 24 |
| 72 | ? | 12 |

La réponse est 48. Le nombre situé au centre est obtenu en faisant la multiplication de ceux situés sur les colonnes, rangées ou diagonales au milieu desquelles il est situé.

Il vous faudra savoir repérer des « astuces » qui désorientent par rapport au raisonnement classique.

Exemple 111 3 222 6 333 ?

La réponse est 9. $1 + 1 + 1 = 3$ ; $2 + 2 + 2 = 6$ ; $3 + 3 + 3 = 9$.

## 2. Conseils

Ne cherchez pas des raisonnements trop compliqués, la logique est souvent toute simple. Certaines réponses sont évidentes si vous savez observer la structure de l'exercice.

Exercice **1.**

**> Complétez chaque suite numérique.**

**a.** 8 11 3 2 3 11 ?

**b.** 1 2 3 5 7 ?

**c.** 1 2 4 8 16 ?

**d.** 13 18 15 16 17 14 ? ?

**e.** 81 64 49 36 ?

**f.** 2 48 6 24 18 12 54 ? ?

**g.** 98 76 54 32 ?

**h.** 1 8 27 64 ?

**i.** 11 33 55 77 ?

**j.** 922 13 837 18 431 ?

Exercice **2.**

Vous avez 7 chiffres : 3 4 5 6 7 8 9 agencés par groupe selon une compréhension logique.

**> Pour chaque groupe, cherchez les chiffres manquants indiqués par des points.**

**a.** 5 6 7
6
5 • •

**b.** 5 6 7
7 8 •
9 • 4

**c.** 3 5 7 5 7 9 • • •

**d.** 4 6 8 3
4 7 3 •
4 8 5 •

**e.** 345 789 567 •••

**f.** 3 3
6 7 4 9 • 5
5 7

**g.** 3 8 9
4 7 •
5 6 •

**h.** 3 5 7
6
5 • •

**i.** 3 9 5 4 7 6 •
8 4 3 6 5 8 •

**j.** 3 4 5
6 7 8
4 3 •
7 6 •

## CORRIGÉS

Exercice **1. a.** 8
Reprise des 3 premiers nombres en sens inverse

**b.** 11 Suite de nombres premiers.

**c.** 32 Nombre précédent doublé.

**d.** 19 - 12 Combinaison de 2 suites. La première augmente de 2. La deuxième diminue de 2.

**e.** 25 Progression décroissante de carrés : $9^2$, $8^2$, $7^2$...

**f.** 6 - 162 Combinaison de 2 suites. La première a une raison de $\times$ 3. La deuxième a une raison de $\div$ 2.

**g.** 10 Succession des chiffres dans un ordre décroissant : 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0.

**h.** 125 Progression croissante de chiffres au cube : $1^3$, $2^3$, $3^3$, $4^3$,...

**i.** 99 Chiffre impair doublé.

**j.** 8 Nombre 2 = somme des chiffres du nombre 1.
Nombre 4 = somme des chiffres du nombre 3.
Nombre 6 = somme des chiffres du nombre 5.

Exercice **2.**

**a.** 6 - 7 Symétrie ligne du bas et ligne du haut.

**b.** 9 3 Progression croissante en repartant pour chaque ligne du dernier chiffre de la ligne précédente.

**c.** 7 9 4 En partant du 2e chiffre du groupe précédent, progression avec saut de 1.

**d.** 6 9
Progression avec saut de 1 pour la 1re ligne, saut de 2 pour la 2e ligne et saut de 3 pour la 3e.

**e.** 4 5 6 Ente chaque groupe de chiffres, saut de 1, puis saut de 2 et saut de 3.

**f.** 4 En tournant dans le sens des aiguilles d'une montre pour aller vers le centre, progression avec un saut de 1.

**g.** 3 4 Raisonnement en diagonales croisées : 3-4-5 ; 6-7-8 ; 9-3-4.

**h.** 7 - 3 Saut de 2 comme pour la ligne du haut.

**i.** 9 7 Lecture croisée : 3-4-5... et 8-9-3...

**j.** 9 5 Progression croissante de gauche à droite pour le 1er groupe, de droite à gauche pour le 2e groupe.





Exercice **3.**

**> Quel est le nombre manquant dans chaque carré ?**

**a.**

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 12 | 8 |
| 10 | 15 | 5 |
| 7 | ? | 11 |

**b.**

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 2 | 7 |
| 14 | 42 | 3 |
| 6 | 21 | ? |

**c.**

| | | |
|---|---|---|
| 24 | 4 | 8 |
| 3 | 48 | 16 |
| 6 | 12 | ? |

**d.**

| | | |
|---|---|---|
| 48 | 58 | 26 |
| 37 | 23 | 14 |
| 3 | 35 | ? |

**e.**

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 |
| 6 | 34 | 4 |
| 1 | 6 | ? |

**f.**

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 1 | 6 |
| ? | 15 | 2 |
| 11 | 3 | 8 |

**g.**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| ? | 5 | 4 |
| 4 | 9 | 3 |

**h.**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| ? | 72 | 3 |
| 1 | 3 | 2 |

Exercice **4.**

Soit un ensemble de 6 nombres : 4 3 9 12 11 7 qui vous serviront de base pour constituer des suites vérifiant les propositions données pour chaque exercice.

**> Trouver la suite.**

**a.** 4 - 3 a un élément commun et bien placé avec la suite à trouver.
4 - 9 a un élément commun et mal placé avec la suite à trouver.

Suite : ? ?

**b.** 4 - 9 a un élément commun mal placé.
11 - 9 a un élément commun bien placé.

Suite : ? ?

**c.** 7 - 12, 11 - 9, 11 - 7 } ont un élément commun mal placé avec la suite à trouver.

Suite : ? ?

## CORRIGÉS

Exercice **3.**

**a.** 3
Le nombre situé au centre est obtenu en faisant la somme de ceux situés sur les colonnes, rangées ou diagonales au milieu desquelles il est situé.

**b.** 3
Le nombre situé au centre est obtenu en faisant la multiplication de ceux situés sur les colonnes rangées ou diagonales au milieu desquelles il est situé.

**c.** 2 Voir exercice **b.**

**d.** 25
Le nombre situé au centre est obtenu en faisant la soustraction de ceux situés sur les colonnes, rangées ou diagonales au milieu desquelles il est situé.

**e.** 2
Le nombre du milieu est obtenu en faisant la somme de tous ceux qui l'entourent.

**f.** 4
En tournant dans le sens des aiguilles d'une montre : $5 + 1 \rightarrow 6 + 2 \rightarrow 8 + 3 \rightarrow 11 + 4 \rightarrow 15$.

**g.** 16
En tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, chaque chiffre est suivi de son carré ($1 \rightarrow 1$ ; $2 \rightarrow 4$ ; $3 \rightarrow 9$...).

**h.** 2
Le nombre du milieu est obtenu en multipliant tous ceux qui l'entourent.

Exercice **4.**

**a.** 9 - 3
4 ne peut être à la fois bien placé et mal placé donc est à éliminer.
Il reste 3 et 9 dont 9 mal placé, la suite ne peut être que 9 - 3.

**b.** 11 - 4
9 ne peut être à la fois bien placé et mal placé donc est à éliminer.
Il reste 4 et 11 dont 4 mal placé, la suite ne peut être que 11 - 4.

**c.** 12- 11
7 ne peut être à la fois mal placé en 1re position et mal placé en 2e position donc est à éliminer.
Dans la 1re proposition, 12 est donc mal placé ainsi que 11 dans les 2e et 3e propositions.

**d.** 4 - 9 - 12 ont deux éléments bien placés.
4 - 12 - 11 ont un élément bien placé.
9 - 7 - 3 ont deux éléments mal placés.

Suite : ? ? ?

**e.** 9 - 12 - 3
12 - 3 - 9
11 - 3 - 12
ont chacune 2 éléments communs mal placés.

Suite : ? ? ?

**f.** 12 - 9 - 3 - 11
3 - 9 - 7 - 11
ont chacune 3 éléments communs bien placés.

Suite : ? ? ? ?

**g.** 12 - 9 - 7 - 3
4 - 3 - 12 - 11
3 - 9 - 7 - 12
4 - 12 - 3 11
ont chacune 2 éléments communs bien placés.

Suite : ? ? ? ?

**h.** 11 - 3 - 9 - 12
3 - 12 - 11 - 9
9 - 11 - 12 - 3
ont chacune 4 éléments communs mal placés.

Suite : ? ? ? ?

**i.** 9 - 7 - 12 - 4 a 2 éléments communs mal placés
7 - 9 - 11 - 3
et
11 - 3 - 9 - 7
ont chacune 4 éléments communs mal placés.

Suite : ? ? ? ?

**j.** 12 - 9 -7 - 11 - 3
9 - 7 - 11 - 3 - 12
7 - 11 - 3 - 12 - 9
11 - 3 - 12 - 9 - 7
ont chacune 5 éléments communs mal placés.

Suite : ? ? ? ? ?

## CORRIGÉS

**d.** 4 - 9 - 7
12 ne peut être à la fois bien placé en 3e position et en 2e position donc est à éliminer. Nous pouvons retenir alors 7 forcément mal placé dans la 3e proposition.

**e.** 3 - 9 - 11
le 12 est à éliminer d'emblée et le 3 pour être bien placé ne peut être qu'en 1re position. Le 9 pour être bien placé ne peut être qu'en 2e position. Le 11 est alors en 3e position.

**f.** 12 - 9 - 7 - 11
le 3 est à éliminer d'emblée, il reste donc 12 - 9 - 7 - 11.

**g.** 4 - 9 - 7 - 11
Le 3 est à éliminer d'emblée ainsi que le 12, il reste donc 4 - 9 - 7 - 11.

**h.** 12 - 9 - 3 - 11
Tous les nombres doivent changer de position : 11 ne peut être bien placé qu'en 4e position, 3 en 3e position, 9 en 2e position donc 12 en 1re position.

**i.** 9 - 11 - 7 - 3
12 et 4 qui n'appartiennent qu'à la proposition 1 peuvent être éliminés ; 7 ne peut être bien placé qu'en 3e position et 9 en 4e position ; 11 viendra donc en 1re position.

**J.** 3 - 12 - 9 - 7 - 11
Chaque nombre doit prendre la seule position qu'il n'a pas dans les quatre propositions.